V Congreso de Ingeniería de Organización
Valladolid-Burgos, 4-5 Septiembre 2003

Índice

Nuevos Algoritmos en el Problema de Transporte

Francisco López Ruiz [1] , Germán Arana Landín [2]
[1] Doctor Ingeniero Industrial, Departamento Organización de Empresas. E.U.I.T.I.-San Sebastián-UPV. Correo-e: oeploruf@sc.ehu.es
[2] Ingeniero de Organización Industrial, Departamento Organización de Empresas. E.U.I.T.I.-San Sebastián-UPV. Correo-e: oeparlag@sc.ehu.es

RESUMEN

Una vez formulado el modelo matemático del problema de transporte, el siguiente paso es resolver el modelo, es decir, obtener los mejores valores numéricos para las variables de decisión. La forma en que se obtengan estos valores depende del tipo específico del modelo matemático utilizado. Por tanto, una vez definido el modelo, se podrá elegir un método apropiado para resolverlo. En el problema de transporte, estos métodos pertenecen a una de estas dos categorías:

1.-Métodos óptimos*, que permiten obtener los mejores valores para las variables de decisión, es decir, aquellos valores que satisfacen simultáneamente todas las restricciones y proporcionan el mejor valor para la función objetivo.*

2.-Métodos heurísticos, *que permiten obtener valores para las variables de decisión que satisfacen todas las restricciones. Aunque no necesariamente óptimos, estos valores proporcionan un valor aceptable para la función objetivo.*

En comparación con los métodos óptimos, los métodos heurísticos son computacionalmente más eficientes y, por tanto, se utilizan cuando la obtención de soluciones óptimas conlleva excesivo tiempo o bien es imposible por ser el modelo matemático demasiado complejo. Este artículo aporta tres nuevos algoritmos para la obtención de soluciones iniciales, basados en los métodos heurísticos.

Palabras clave: Programación Lineal. Problema del transporte. Algoritmo de Transporte. Métodos de obtención de una solución inicial. Algoritmo de optimización y mejora.

1. Introducción al problema de transporte

Una de las aplicaciones más interesantes de los problemas de programación lineal es el llamado problema de transporte, que resulta ser un modelo lineal que presenta una estructura especial. Este problema fue planteado y resuelto por F. L. Hitchcock[1] con anterioridad a la formulación del concepto general de la programación lineal, siendo debido a G. B. Dantzig[2] la aplicación de la programación lineal a la resolución del problema de transporte mediante el método general del Simplex.

Los métodos de resolución de este problema pertenece a la clase de los llamados modelos combinatorios que presentan una gran complejidad computacional y ofrecen un número muy grande de posibles soluciones, siendo por ello necesario buscar otro tipo de métodos de solución.

En consecuencia, los esfuerzos referentes a la búsqueda de métodos diferentes de resolución se han dirigido en un primer enfoque hacia los métodos que están basados en la utilización de algoritmos matemáticos, es decir, que permiten obtener una solución óptima exacta para el problema combinatorio, mediante la utilización de técnicas que permitan reducir la búsqueda de soluciones (p.e. el método del Simplex, para la Programación Lineal).

Alternativamente, se han propuesto determinados métodos heurísticos que carecen de una base matemática formal y que están basados en la intuición. Sin embargo, permiten obtener una solución inicial próxima a la solución óptima con la ventaja de obtener ahorros considerables en tiempo respecto a los métodos basados en algoritmos matemáticos, por lo que estos últimos métodos no resultan ser apropiados para su utilización en problemas de gran tamaño.

Cada una de estas alternativas (métodos basados en algoritmos matemáticos y métodos heurísticos), presentan ventajas e inconvenientes. El presente artículo aporta tres nuevos métodos para la resolución del problema de transporte basados en la segunda alternativa.

Actualmente, el modelo de transporte presenta una gran variedad de aplicaciones en los diferentes ámbitos de la empresa (comercial, industrial, etc.) que no tienen relación con el transporte. Sin embargo, sigue hablándose del problema de transporte. Muchos problemas económicos que en principio nada tienen que ver con el problema de transporte, mediante la utilización de ciertas transformaciones pueden ser convertidos en un problema de transporte y en consecuencia, ser resueltos aplicando los métodos propios de este tipo de problemas.

2. Planteamiento del problema

El objetivo de los modelos de transporte es encontrar la solución a un coste mínimo para la realización de un plan de envíos, transporte o distribución, desde cualquier grupo de centros de abastecimiento llamados orígenes, a cualquier grupo de centros de recepción llamados destinos, es decir, determinar la cantidad de productos o mercancías que se deben enviar desde cada punto de origen a cada punto de destino, teniendo en cuenta las restricciones propias del problema referidas a las capacidades o disponibilidades de los centros de abastecimiento y las demandas de los centros de destino, de manera que se minimicen los costes totales de transporte o distribución. Los orígenes pueden ser fábricas, almacenes o cualquier punto o lugar desde el que se quiera enviar mercancías o productos. Los destinos son los puntos o lugares en donde se reciben dichas mercancías o productos.

La resolución de este tipo de problemas se puede llevar a cabo utilizando el método del Simplex. Sin embargo, teniendo en cuenta la estructura especial del problema, se han propuesto algunos *métodos específicos de resolución,* que son más eficientes (en el tiempo), que la resolución a través del método del Simplex, basados en la la *forma matricial* representando el problema del transporte mediante *tabla de transporte,* cuyo objetivo es resumir de manera conveniente todos los datos del problema en cuestión, para poder resolverlo mediante el llamado *algoritmo de transporte.*

3. Resolucion mediante el algoritmo de transporte

El proceso de resolución del problema de transporte se fundamenta en una serie de definiciones, propiedades y teoremas que posibilitan el posterior desarrollo de los resultados básicos obtenidos. Debido a las razones expuestas anteriormente con relación a la resolución del problema del transporte mediante la utilización del método del Simplex, se expone el método de resolución que utiliza la forma matricial del citado problema mediante el algoritmo de transporte

3.1 Algoritmo de transporte

El método general de resolución del problema de transporte consta de tres fases que conforman el denominado *algoritmo de transporte* [3].

Fase A.- Paso 1. Escribir el problema de transporte en la forma matricial. Si el problema es no equilibrado, transformarlo en equilibrado. Ir al paso 2.

Fase B.- Paso 2. Determinar una solución básica factible inicial. Ir al paso 3.

Fase C.- Paso 3. Si la solución obtenida en el paso 2 es óptima, detener el proceso. En otro caso, ir al paso 4.

Paso 4. Obtener una nueva solución que sea mejor que la anterior. Ir al paso3.

3.2 Determinación de una solución inicial

Dentro de la fase B, existen diferentes métodos para determinar una solución inicial entre los que cabe citar:

-Northwest Corner Method o Método de la Esquina Noroeste (MEN)

Inicialmente fue utilizado por G. B. Dantzig[2]. Es un método poco eficiente, ya que las soluciones iniciales están alejadas de la solución óptima, y en general se necesitan bastantes iteraciones para alcanzar dicha solución debido a que en ninguna fase del proceso de búsqueda de una solución inicial factible se tiene en cuenta la información referente a los costes unitarios de transporte y, por lo general, la solución obtenida difiere notablemente de la solución óptima.

-Vogel's Method o Método de Aproximación de Vogel (MAV)

Este método requiere mayores esfuerzos de cálculos que el MEN; sin embargo, permite obtener una solución inicial mejor que en el caso anterior puesto que tiene en cuenta la información de los costes de transporte, mediante los cálculos de las llamadas *penalizaciones de fila* (pf_i) *y columna* (pc_j), los cuales representan el posible coste de penalización que se obtendría por no asignar unidades a transportar a una determinada posición. Ha sido el método más popular durante muchos años, en parte porque es relativamente fácil hacerlo a mano. Este método también es denominado método de Balas-Hammer[4].

-Russell's Method o Método de Aproximación de Russell (RAM)

Este método[5] proporciona otro criterio excelente y fácil de llevarlo a la práctica en un ordenador pero no para la forma manual, debido a que es necesario realizar numerosos cálculos del índice $\gamma_{ij} = c_{ij} - \overline{u_i} - \overline{v_j}$.

Todavía se necesita más experimentación para determinar cual es más eficiente en promedio (respecto al método de Vogel), pero con frecuencia este criterio ha proporcionado una solución mejor. En un problema grande, quizás pueda ser interesante aplicar ambos criterios y posteriormente utilizar la mejor solución que se obtenga para iniciar las iteraciones que permitan obtener la solución óptima.

-Método de los Flujos Mutuamente Preferibles (MFMP)

Este método es debido a H. S. Houthakker[6] y está basado en la noción de flujo mutuamente preferible. Permite obtener normalmente una solución básica mucho más próxima a la óptima que el método MEN ahorrando iteraciones y muchas veces la solución básica ya es óptima. Sin embargo, según A. Kaufmann[7] este método no ha sido justificado en una forma analítica, sino simplemente mediante la noción intuitiva de que los flujos mutuamente preferibles tienen una probabilidad más elevada de estar incluidos en la solución óptima.

-Cost Preprocessing (CP)

Es un método[8] de eficacia análoga a los métodos de Russell y de Vogel y que proporciona otro criterio excelente y fácil de llevarlo a la práctica en un ordenador, pero no para la forma manual, debido a que es necesario realizar numerosos cálculos.

-Otros métodos:

Column Minimun o Método de la Columna Mínima (CM), Modified Column Minimun o Método de la Columna Mínima Modificada (MCM), Row Minimun o Método de la Fila Mínima (RM), Modified Row Minimun o Método de la Fila Mínima Modificada (MRM) y Triangularity Rule (TR), son variantes del método (MFMP); su metodología sigue un patrón de asignaciones que está determinado por un determinado orden en columnas y en filas.

3.3 Optimalidad y mejora de una solución

Se trata de desarrollar la Fase C del algoritmo de transporte una vez finalizada la Fase B, que ha proporcionado una solución básica factible no degenerada. Esta fase trata de determinar si dicha solución es óptima y, en caso de no serlo, obtener una nueva solución con menor coste que la solución actual. Una solución óptima puede ser degenerada, pero no puede serlo la solución a partir de la cual se vaya a obtener otra mejor.

Si la solución básica obtenida no es óptima, la mejora es posible y ésta se puede llevar a cabo mediante diferentes métodos, entre los que cabe citar el método de STEPPING-STONE[9], el método MODI (Modified-Distribution-Method llamado método **u-v**)[10], el método de Ford-

Fulkerson[11], el método de Separación en Estrella de B. Zimmern[12], el método de las Matrices Reducidas de Dwyer y Galler, el método de A. N. Gleyzal y el método gráfico de M. L. Vidale[13].

El algoritmo de Stepping-Stone conocido también con el nombre del método del paso a paso, consiste en calcular cuál sería la variación del coste al enviar una unidad de producto por una ruta no utilizada, es decir, calcula los costes marginales de cada ruta no utilizada.

El algoritmo **MODI** conocido como el método de los costes ficticios, consiste en añadir a la matriz de costes una fila y una columna que recogen unos costes ficticios determinados arbitrariamente (los números MODI), tal que permite calcular los índices de mejora para las celdas (casillas) no utilizadas sin tener que trazar todos los circuitos (ciclos) que requiere el algoritmo de Stepping-Stone. En general, supone ahorros en tiempo respecto a la utilización del algoritmo de Stepping-Stone en la resolución de problemas de transporte, debido a su rapidez y el fácil tratamiento de las soluciones degeneradas. El método MODI o **u-v** utiliza el dual del problema de transporte y viene dado por:

$$max \;\; w = \sum_{i=1}^{m} s_i u_i + \sum_{j=1}^{n} d_j v_j$$

sujeto a:

$$u_i + v_j \le c_{ij} \quad \forall (i,j)$$

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \;\; \textit{no restringidas}$$

$$\mathbf{u} = (u_1, ..., u_m) \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = (v_1, ..., v_n)$$

Para aplicar el algoritmo correspondiente a este método, se introducen los llamados *números* MODI, definidos así:

$R_i = -u_i$ (número MODI correspondiente a la fila i-ésima)
$K_j = -v_j$ (número MODI correspondiente a la columna j-ésima)

Estos valores se sitúan en sus respectivas filas y columnas a la derecha y en la parte inferior de la tabla de transporte. El valor indicador α_{ij} de cada variable x_{ij} es: $\alpha_{ij} = R_i + K_j + c_{ij}$.

3.4. Soluciones degeneradas

Se dice que una solución básica en programación lineal es *degenerada* cuando tiene menos variables positivas que el número de restricciones existentes en el problema. En los programas lineales de transporte se presenta con alguna frecuencia el problema de la degeneración. En el problema de transporte simple existen *(m+n-1) restricciones independientes.* La degeneración se presentará cuando en una solución básica el número de posiciones localizadas o rutas utilizadas sea menor que *(m+n-1).*

Una solución óptima puede ser *degenerada*, es decir, cuando el número de posiciones localizadas es menor que *(m+n-1)*. Sin embargo, para comprobar si la solución actual es o no óptima y en su caso mejorarla, es necesario que sea *no degenerada.* La consecuencia de la degeneración es que los métodos paso a paso, costes indirectos, MODI, no se pueden aplicar. A fin de evitar los inconvenientes que presenta la degeneración y poder aplicar los métodos paso a paso y MODI, existen diferentes métodos para el tratamiento de las soluciones *degeneradas*, entre los que cabe indicar:

-el método de los ceros
-el método de la ε *-perturbación*[3]
-el método de la base parcial de Madan Lal Mittal[14].

El método de la ε *-perturbación* consiste en asignar convenientemente el valor ε (supuesto que es una cantidad próxima a cero) a posiciones no localizadas hasta conseguir *(m+n-1)* posiciones localizadas. Para ello es necesario introducir el concepto de *ciclo* en una tabla de transporte que se construye de acuerdo con un algoritmo determinado. Una propiedad importante es que *"siempre es posible construir un ciclo a partir de una solución básica factible"*. Esto permite obtener siempre una solución no degenerada de una degenerada, lo cual permite entrar en la fase C.

4. Metodos de resolucion basados en el algoritmo de transporte

En un problema de transporte con m orígenes y n destinos, una solución básica consta a lo sumo de (m+n-1) variables x_{ij} con valores positivos, es decir, que tiene (m+n-1) posiciones básicas o localizadas. Esto significa que entre las m.n rutas existentes sólo se enviarán cantidades de producto a través de (m+n-1) rutas, siendo nula la cantidad de producto enviada por las restantes rutas. Cuando en una solución básica el número de variables x_{ij} que toman un valor positivo es menor que (m+n-1) se dice que dicha solución es degenerada. Interesa por tanto, que la solución básica proporcione un valor de la función objetivo lo más próximo al óptimo, de manera que la solución óptima se alcance con un menor número de iteraciones.

El algoritmo de transporte consta de tres fases: A, B y C. Dentro de la Fase B, para la determinación de una solución básica factible inicial existen diferentes métodos. Este artículo aporta tres algoritmos para la obtención de una solución básica inicial del problema de transporte, que tras un posterior proceso de optimización y mejora (Fase C), permitirán obtener la solución óptima. Los algoritmos aportados son los siguientes:

-Método de aproximación variante del método de Vogel (MAVV).
-Método de aproximación por columnas (MAC).
-Método de aproximación por filas/columnas (MAFC).

Estos métodos proporcionan como máximo (m+n-1) posiciones localizadas, siendo las variables asociadas con dichas posiciones las correspondientes a las variables básicas iniciales. A continuación pasamos a exponer los pasos correspondientes al algoritmo de cada método.

4. 1 Método de aproximación variante método de Vogel (MAVV)

Paso 1. *Localizar la posición (i, j) correspondiente a la casilla con mayor coste* c_{ij} *. En caso de igualdad de dos o más casillas con mayor coste, elegir la posición de la casilla de mayor coste afectada con el menor índice de fila. Si persiste la igualdad entre casillas de mayor coste por pertenecer a la misma fila, elegir la posición de la casilla de mayor coste afectada con el menor índice de columna. A continuación, ir al paso* 2.

Paso 2. Determinada la posición (i,j) anterior, se procede como sigue:

2.1. *Determinar la diferencia* D_f *entre los dos costes menores de la fila i.*

2.2. *Determinar la diferencia* D_c *entre los dos costes menores de la columna j.*

2.3. *Si* $D_c \geq D_f$ *, elegir para asignar la columna j. En caso contrario, elegir para asignar la fila i.*

2.4. *En la fila i o en la columna j elegida en el paso 2.3. asignar a la posición (i, j) correspondiente a la casilla de menor coste* c_{ij}*, la cantidad* x_{ij} *tal que:*

$$x_{ij} = mín. \ \{s_i, d_j\}$$

En caso de igualdad entre casillas de menor coste, elegir la posición con mayor índice de fila o columna según proceda.

2.5. *Reducir* s_i *y* d_j *en la cantidad* x_{ij} *asignada a la casilla (i, j) del paso 2.4. de manera que:*

$$s'_i = s_i - x_{ij} \qquad\qquad d'_j = d_j - x_{ij}$$

con esto se consigue que la fila i o la columna j o ambas a la vez queden saturadas, pudiéndose eliminar de la tabla de transporte.

2.6. *Si la fila o columna que contiene a la casilla (i, j) de mayor coste del paso 1 está saturada, ir al paso 3. En caso contrario, volver a iniciar el paso 2.*

Paso 3. *Mientras existan dos o más filas o columnas sin saturar, volver al paso 1. Cuando quede sólo una fila o columna sin saturar, realizar las únicas asignaciones posibles. Cuando todas las filas y columnas estén saturadas, parar. Se habrá obtenido una solución inicial básica factible.*

4.2 Método de aproximación por columnas (MAC)

Paso 1. *Localizar la columna j correspondiente a la posición (i, j) de la casilla con mayor coste* c_{ij}*. En caso de igualdad de mayor coste en dos o más casillas pertenecientes a la misma o diferentes columnas, elegir la columna cuya diferencia entre las dos casillas de menor coste sea el mayor valor. Si se mantiene la igualdad tras dicha diferencia, elegir la columna que contenga a la casilla de mayor coste, con el menor índice de columna.*

Paso 2. *Buscar en la columna j la posición (i, j) de la casilla con menor coste* c_{ij} *, asignando a dicha posición la cantidad* x_{ij} *tal que:*

$$x_{ij} = mín. \ \{s_i, d_j\}$$

En caso de igualdad de c_{ij} *mínimo entre dos o más casillas de la misma columna, elegir la casilla cuya asignación* x_{ij} *sea la menor. Si persiste la igualdad, elegir la casilla con mayor índice de fila.*

Reducir s_i *y* d_j *en la cantidad* x_{ij} *asignada a la casilla anterior (i, j) de manera que:*

$$s'_i = s_i - x_{ij} \qquad\qquad d'_j = d_j - x_{ij}$$

con esto se consigue que la fila i o la columna j, o ambas a la vez, queden saturadas, pudiéndose eliminar de la tabla. Si la columna j está saturada ir al paso 3. En caso contrario, volver al paso 2.

Paso 3. *Mientras existan dos o más columnas sin saturar, volver al paso 1. Cuando quede una sola columna sin saturar, realizar las únicas asignaciones posibles. Cuando todas las columnas estén saturadas, parar. Se habrá obtenido una solución inicial básica.*

4.3 Método de aproximación por filas / columnas (MAFC)

Paso 1. *Localizar la posición (i, j) correspondiente a la casilla con mayor coste* c_{ij}*. En caso de igualdad de dos o más casillas con mayor coste, elegir la posición de la casilla de mayor coste afectada con el menor índice de fila. Si persiste la igualdad entre casillas de mayor coste por pertenecer a la misma fila, elegir la posición de la casilla de mayor coste afectada con el menor índice de columna. A continuación, ir al paso 2.*

Paso 2 .

2.1. En la fila i, asignar a la posición (i, j) correspondiente a la casilla de menor coste c_{ij}*, la cantidad* x_{ij} *tal que:*

$$x_{ij} = mín. \ \{s_i, d_j\}$$

En caso de igualdad entre casillas de menor coste, elegir la posición correspondiente a la cantidad x_{ij} *menor. Si persiste la igualdad, elegir la posición correspondiente al índice de columna mayor.*

2.2. En la columna j, asignar a la posición (i, j) correspondiente a la casilla de menor coste c_{ij}*, la cantidad* x_{ij} *tal que:*

$$x_{ij} = mín. \ \{s_i, d_j\}$$

En caso de igualdad entre casillas de menor coste, elegir la posición correspondiente a la cantidad x_{ij} menor. Si persiste la igualdad, elegir la posición correspondiente al índice de fila mayor.

2.3. Elegir como posición (i, j) para asignar x_{ij} unidades, la casilla con la menor asignación de las cantidades x_{ij} de los pasos 2.1 y 2.2. En caso de igualdad, elegir una cualquiera de dichas casillas.

2.4. Reducir s_i y d_j en la cantidad x_{ij} asignada a la casilla (i, j) del paso 2.3. de manera que:

$$s'_i = s_i - x_{ij} \qquad\qquad d'_j = d_j - x_{ij}$$

con esto se consigue que la fila i o la columna j o ambas a la vez queden saturadas, pudiéndose eliminar de la tabla de transporte.

2.5. Si la fila o columna que contiene a la casilla (i, j) de mayor coste del paso 1 está saturada, ir al paso 3. En caso contrario, volver a iniciar el paso 2.

Paso 3. *Mientras existan dos o más filas o columnas sin saturar, volver al paso 1. Cuando quede sólo una fila o columna sin saturar, realizar las únicas asignaciones posibles. Cuando todas las filas y columnas estén saturadas, parar. Se habrá obtenido una solución inicial básica factible.*

Ejemplo.- Como aplicación de los métodos propuestos, tratemos de resolver mediante el método MAVV, el problema de transporte representado mediante la siguiente tabla en forma matricial:

Destinos (j) Orígenes (i)	D1	D2	D3	D4	DISPONIBILIDAD
S1	2	3	5	6	5
S2	2	1	3	5	10
S3	3	8	4	6	15
DEMANDA	12	8	4	6	

<u>Fase A.-</u> Se observa que el problema es equilibrado al ser: $\sum_{i=1}^{i=3} s_i = \sum_{j=1}^{j=4} d_j$, tal que:

$$\sum_{i=1}^{i=3} s_i = 5 + 10 + 15 = 30 \qquad \text{y} \qquad \sum_{j=1}^{j=4} d_j = 12 + 8 + 4 + 6 = 30.$$

<u>Fase B.-</u> Los pasos a seguir en el algoritmo del MAVV son los siguientes:

Paso 1. La posición (i,j) que contiene a la casilla de mayor coste (8) es la (3, 2). Ir al paso 2.

Paso 2. Determinada la posición (3, 2) se procede como sigue:

2.1. En la fila i=3 la diferencia D_f es (4-3)=1.

2.2. En la columna j=2 la diferencia D_c es (3-1)=2.

2.3. Como $D_c \geq D_f$, elegimos para asignar la columna j=2.

2.4. En la columna j=2, la posición (i, j) correspondiente a la casilla de menor coste (1) es la (2, 2). La asignación x_{22} es:

$$x_{22} = \min.\ \{s_2, d_2\} = \min.\ \{10,\ 8\} = 8 \qquad \Rightarrow \qquad x_{22} = 8$$

2.5. Reducir s_2 y d_2 en la cantidad x_{22} =8 tal que:

$$s'_2 = 10 - 8 = 2 \qquad\qquad d'_2 = 8 - 8 = 0$$

2.6. Como la columna j=2 está saturada, ir al paso 3, siendo la nueva tabla:

Destinos (j) / Orígenes (i)	D1	D3	D4	DISPONIBILIDAD
S1	2	5	6	5
S2	2	3	5	2
S3	3	4	6	15
DEMANDA	12	4	6	

Paso 3. Como queda tres filas y columnas sin saturar, volver al paso 1.

Paso 1. La posición (i,j) que contiene a la casilla de mayor coste (6) es la (1, 4). Ir al paso 2.

Paso 2. Determinada la posición (1, 4) se procede como sigue:

2.1. En la fila i=1 la diferencia D_f es (5-2)=3.

2.2. En la columna j=4 la diferencia D_c es (6-5)=1.

2.3. Como $D_f > D_c$ elegimos para asignar la fila i=1.

2.4. En la fila i=1, la posición (i, j) correspondiente a la casilla de menor coste (2) es la (1, 1). La asignación x_{11} es:

$$x_{11} = \min.\ \{s_1, d_1\} = \min.\ \{5,\ 12\} = 5 \qquad \Rightarrow \qquad x_{11} = 5$$

2.5. Reducir s_1 y d_1 en la cantidad $x_{11} = 5$ tal que:

$$s'_1 = 12 - 5 = 7 \qquad \text{y} \qquad d'_1 = 5 - 5 = 0$$

2.6. Como la fila i=1 está saturada, ir al paso 3. La nueva tabla es:

Destinos (j) / Orígenes (i)	D1	D3	D4	DISPONIBILIDAD
S2	2	3	5	2
S3	3	4	6	15
DEMANDA	7	4	6	

Paso 3. Como existen filas y columnas sin saturar, ir al paso 1.

Paso 1. La posición (i,j) que contiene a la casilla de mayor coste (6) es la (3, 4). Ir al paso 2.

Paso 2. Determinada la posición (3, 4) se procede como sigue:

2.1. En la fila i=3 la diferencia D_f es (4-3)=1.

2.2. En la columna j=4 la diferencia D_c es (6-5)=1.

2.3. Como $D_c \geq D_f$ elegimos para asignar la columna j=4.

2.4. En la columna j=4, la posición (i, j) correspondiente a la casilla de menor coste (5) es la (2, 4). La asignación x_{24} es:

$$x_{24} = \min. \{s_2, d_4\} = \min. \{2,\ 6\} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad x_{24} = 2$$

2.5. Reducir s_2 y d_4 en la cantidad $x_{24} = 2$ tal que:

$$s'_2 = 2 - 2 = 0 \quad \text{y} \qquad d'_4 = 6 - 2 = 4$$

2.6. Como la fila i=2 está saturada, ir al paso 3. La nueva tabla es:

Destinos (j) / Orígenes (i)	D1	D3	D4	DISPONIBILIDAD
S3	3	4	6	15
DEMANDA	7	4	4	

Paso 3. Existe una sola fila sin saturar. Realizamos la triple asignación posible:

$$x_{31} = 7; \quad x_{33} = 4; \quad x_{34} = 4.$$

Como todas las filas y columnas están saturadas, el proceso se detiene. La solución en forma matricial es:

Destinos (j) / Orígenes (i)	D1	D2	D3	D4	DISPONIBILIDAD
S1	**5** (2)	- (3)	- (5)	- (6)	5
S2	- (2)	**8** (1)	- (3)	**2** (5)	10
S3	**7** (3)	- (8)	**4** (4)	**4** (6)	15
DEMANDA	12	8	4	6	

O sea:

$$\begin{array}{cccc} x_{11}=5 & x_{12}=0 & x_{13}=0 & x_{14}=0 \\ x_{21}=0 & x_{22}=8 & x_{23}=0 & x_{24}=2 \\ x_{31}=7 & x_{32}=0 & x_{33}=4 & x_{34}=4 \end{array}$$

Esta solución tiene 6 posiciones básicas localizadas ($x_{ij} > 0$) con un coste de: C = 89 unidades monetarias (u.m.). Es una solución *no degenerada*, puesto que el número de posiciones básicas localizadas es de 6=(m+n-1). Con esta solución obtenida, hemos realizado la fase B dentro del algoritmo del transporte. Para comprobar si esta solución es óptima, hemos de realizar la fase C.

Fase C.- La optimización de la solución inicial obtenida anteriormente se puede comprobar tal como hemos indicado anteriormente, utilizando bien el algoritmo de Steping-Stone o bien el algoritmo de distribución modificada (MODI). Empleando cualesquiera de estos dos algoritmos, se comprueba que la solución obtenida inicialmente es *óptima* con múltiples óptimos, siendo 0 el número de iteraciones necesarias para alcanzar la solución óptima, coincidiendo con las soluciones obtenida mediante el primer método propuesto (SE+PL).

5. Conclusiones

Con relación a los métodos propuestos, las aportaciones realizadas en el presente artículo son las siguientes:

A.- Determinar una solución inicial próxima a la solución óptima de forma rápida y sencilla, de manera que mediante el posterior proceso de optimización y mejora y tras pocas iteraciones (Fase C), se obtenga la solución óptima.

Respecto a la "bondad" de las soluciones iniciales obtenidas, hay que tener en cuenta que los resultados indicados lo son para problemas de pequeño tamaño resolubles manualmente. Para poder llegar a conclusiones más definitivas, se necesitaría realizar más experimentación con problemas de mayor tamaño, a fin de determinar si los métodos propuestos son más eficientes en promedio respecto a los métodos: Russell y Vogel.

B.- Los métodos propuestos sigue siendo válidos, para el caso del problema de transporte en los siguientes supuestos: a) los costes de un problema pueden ser beneficios; b) cuando en un problema de transporte hay rutas que no son factibles.

Referencias

[1] HITCHCOCK, F. L.- *The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities.* Jour. Math. And Phys., 1941.

[2] DANTZIG G. B.- *Linear Programming and Extensions.* Princeton University Press, New Jersey 1963.

[3] RIOS INSUA S.- *Investigación Operativa. Optimización.* E. C. Estudios Ramón Areces, S. A. 1993.

[4] SUAREZ SUAREZ, A.- *La programación económica por el método del transporte.* Estudios del Instituto de Desarrollo Económico, Madrid 1972.

[5] LARRAÑETA, J.- *Programación lineal y grafos.* Servicio Publicaciones Universidad de Sevilla, 1987.

[6] HOUTAKKER, H. S.- *On the numerical solution of the transportation problem.* Jorsa, 1955.

[7] KAUFMANN, A.-*Métodos y modelos de Investigación de Operaciones.* CECSA, México 1965.

[8] WISTON W. L.- *Operations Research. Aplications and Algorithms.* Editores: Duxbury Press, Belmont, California. Third Edition. 1994.

[9] DANTZIG G. B.- *Aplication of the Simplex Method to a Transportation Problem.* Monografía n.º 13 de la Cowles Commision. Jhon Wiley, New York 1951.

[10] DORFMAN, R., SAMUELSON, P. A., y SOLOW, R. M.- *Programación Lineal y Análisis Económico.* Edit. Aguilar, Madrid 1964.

[11] FORD L. R., FULKERSON D. R.- *Flows in Networks.* Princeton University Press, New Jersey 1962.

[12] ZIMMERN, B.- *Resolution des programmes lineaires de transport par la méthode de separation en étoile.* SOFRO, 1957.

[13] VIDALE, M. L.- *A Graphical Solution of the Transportation Problem.* Jorsa, 1958.

[14] MADAN LAL MITTAL.- *A note on resolution of degeneracy in transportation problem.* Op. Res. Qu., 1967.