*V Congreso de Ingeniería de Organización*
*Valladolid-Burgos, 4-5 Septiembre 2003*

Índice

# Programación de horarios de trabajadores polivalentes y asignación simultánea de tareas a las categorías.

Jordi Ojeda[1], Albert Corominas[2], Rafael Pastor[3]
[1] Ing. Industrial, Centre CIM UPC-ICT, C Llorens i Artigas 12, 08028 Barcelona, ojeda@ioc.upc.es
[2] Dr. Ing. Industrial, IOC-DOE-ETSEIB, UPC, Av. Diagonal 647, 08028 Barcelona, corominas@ioc.upc.es
[3] Dr. Ing. Industrial, IOC-DOE-ETSEIB, UPC, Av. Diagonal 647, 08028 Barcelona, pastor@ioc.upc.es

**RESUMEN**

*Se propone un modelo de programación lineal mixta (PLM) para asignar los horarios de trabajo al personal polivalente presente en la empresa, en una semana laboral determinada. La polivalencia consiste en la posibilidad de que los operarios de una categoría puedan realizar varias tareas, con rendimientos y prioridades diferentes. Los horarios admisibles se conocen y los trabajadores pueden atribuir cierta preferencia sobre los mismos. Se dispone de la capacidad deseada y mínima de cada tarea, en cada período de tiempo. El modelo asigna el horario semanal de presencia a cada trabajador y determina el número de trabajadores de cada categoría que realiza cada tarea en todo período, sin personalizar la asignación tarea-operario (que se debe realizar posteriormente).*

***Palabras clave:*** *Programación lineal mixta, Horarios de trabajo*

## 1. Introducción.

Gran cantidad de productos y servicios tienen una demanda que presenta variaciones estacionales más o menos acusadas o, lo que es lo mismo, una demanda no uniforme. Para hacer frente a la variabilidad de la demanda, tanto en cantidad como en composición, existen básicamente dos líneas a seguir:

- crear stocks (cuando ello es posible) en épocas de poca demanda, y/o
- adaptar la capacidad productiva a la demanda.

La segunda opción es la más adecuada en un centro de servicios, puesto que una de las características de los servicios es la de no poder almacenarlos. Esa necesidad de adaptación a la demanda es una cuestión clave en la sociedad actual, si tenemos en cuenta que en la mayoría de los países desarrollados alrededor de dos tercios de los trabajadores se emplean en el sector servicios.

En [1] se indica que los criterios que normalmente consideran más importantes los responsables de pequeñas empresas para su negocio son los de proporcionar un mejor servicio y dedicar menos tiempo y esfuerzo en la preparación de la programación de horarios, respetando las restricciones de disponibilidad y de preferencias de los trabajadores.

Diversos autores (ver, por ejemplo, [2] y [3]) presentan una estructura jerárquica en los problemas de planificación de la mano de obra en tres fases: 1) planificación; 2) programación; 3) asignación.

En la fase de programación se realiza la asignación de los horarios de presencia a los trabajadores. Se han publicado numerosos trabajos (por ejemplo, [4]) para definir el número de personas que deben trabajar en cada turno con la condición de que la presencia no sea inferior a un valor establecido para cada período. En este trabajo se propone un modelo de programación matemática para resolver la programación de los horarios semanales con capacidades deseada y mínima conocidas, donde los horarios a asignar se obtienen de una lista de horarios admisibles y los operarios pueden atribuir cierta preferencia sobre los mismos. Una de las posibles aplicaciones es en el marco de la organización del tiempo de trabajo con jornada anualizada (ver [5] y [6]), donde la asignación de horarios se debe realizar de forma reiterada para cada semana y las preferencias sobre los horarios evolucionan en función de las asignaciones de las semanas anteriores.

Se considera el caso en que los trabajadores son polivalentes; es decir, existe la posibilidad de que los de una categoría determinada puedan realizar más de una tarea, con rendimientos y prioridades iguales o diferentes.

## 2. Características del problema.

En este trabajo se propone un modelo de programación matemática para resolver la asignación de los horarios semanales de trabajo al personal polivalente presente en una empresa con demanda no uniforme.

Los datos básicos para el modelo son: 1) relación de trabajadores de plantilla (con los datos siguientes para cada uno de ellos: categoría y conjunto priorizado de horarios admisibles de la semana que se trate); 2) tareas que pueden realizar los trabajadores de cada categoría y la prioridad y el rendimiento correspondientes a cada par categoría-tarea; 3) capacidad mínima y deseada de trabajadores para cada tarea, en cada período de tiempo.

El modelo permite tener en cuenta la eficiencia (ver [7]), es decir, la proporción entre el producto (o el resultado obtenido) y los medios utilizados. Cuando la eficiencia de una categoría al realizar una tarea determinada es igual a la unidad, indica que el resultado obtenido es el esperado en el tiempo previsto, pudiendo considerar a esa categoría como referencia para realizar esa tarea.

El problema se puede plantear como un programa no lineal mixto (PNLM) cuya linealización conduce a un programa lineal mixto (PLM), para la resolución del cual se ha utilizado el optimizador CPLEX.

El texto completo se estructura de la siguiente manera: en el apartado 3 se describe la notación utilizada; en el apartado 4 y 5 se formalizan los modelos no lineales y los modelos linealizados. Finalmente, se indican los resultados de la experiencia computacional realizada y las conclusiones obtenidas.

## 3 Notación

### 3.1 Datos del modelo

A continuación se exponen los datos a considerar:

| | |
|---|---|
| $T$ | Número de períodos que comprende la semana (excluidos, naturalmente, aquellos en que no hay actividad en el centro de trabajo). |
| $W$ | Número de trabajadores disponibles en la semana a programar. |
| $C$ | Número de categorías de trabajadores. |
| $n_c$ | Número de trabajadores de la categoría $c$ $(c=1...C)$: $W = \sum_{c=1}^{C} n_c$ |
| $e_i$ | Indica la categoría $(1...C)$ del trabajador $i$ $(i=1...W)$. |
| $J$ | Número de tareas diferentes. |
| $H_i$ | Número de horarios posibles para el trabajador $i$ $(i=1...W)$. |
| $a_{tih}$ | Componente de una matriz binaria donde $a_{tih}=1$ si hay presencia en el centro de trabajo, en el período $t$ $(t=1...T)$ del trabajador $i$ $(i=1...W)$ para el horario $h$ $(h=1...H_i)$. |
| $b_{ih}$ | Componente de una matriz que indica la penalización que el trabajador $i$ $(i=1...W)$ otorga al horario $h$ $(h=1...H_i)$. Se propone asignar un valor entre 0 (nada penalizado) y 100 (muy penalizado). |
| $f_{cj}$ | Componente de una matriz binaria de polivalencias donde $f_{cj}=1$ si los trabajadores de la categoría $c$ $(c=1...C)$ pueden realizar la tarea $j$ $(j=1...J)$. |
| $P$ | Matriz de prioridades donde $p_{cj}$ es la prioridad de que un trabajador de la categoría $c$ $(c=1...C)$ haga una tarea $j$ $(j=1...J)$ ), $\forall(c,k) \mid f_{ck}=1$. Se propone asignar un valor entre 0 (poca prioridad) y 100 (mucha prioridad). |
| $\rho_{cj}$ | Coeficiente que indica el rendimiento asociado a los trabajadores de la categoría $c$ $(c=1...C)$ cuando realizan una tarea $j$ $(j=1...J)$; este valor es definido siempre y cuando $f_{cj}=1$. Se expresa en tanto por uno y refleja la eficiencia de cada categoría al asignarle una de las tareas que puede realizar. |
| $dm_{tj}$ | Cota inferior entera de la capacidad de la tarea $j$ $(j=1...J)$ en el período $t$ $(t=1...T)$. |
| $dd_{tj}$ | Valor deseado de la capacidad de la tarea $j$ $(j=1...J)$ en el período $t$ $(t=1...T)$. |
| $\lambda d_j$ | Coeficiente de la función objetivo que indica la importancia relativa del déficit de la tarea $j$ $(j=1...J)$ respecto a las demás. |
| $\lambda s_j$ | Coeficiente de la función objetivo que indica la importancia relativa del superávit de la tarea $j$ $(j=1...J)$ respecto a las demás. |
| $\alpha d, \alpha s, \alpha b, \alpha p$ | Parámetros de la función objetivo que ponderan los cuatro componentes de la misma: déficit, superávit, penalización por asignar un horario determinado a un trabajador y prioridad asociada a dicha asignación. |

## 3.2 Variables del modelo

A continuación se exponen las variables a considerar en el modelo:

$x_{ih} \in \{0,1\}$ — $x_{ih}=1$ si y sólo si se asigna el horario $h$ $(1...H_i)$ al trabajador $i$ $(i=1...W)$.

$v_{tcj}$ — variable entera que indica el número de trabajadores de la categoría $c$ $(c=1...C)$ dedicados a realizar la tarea $j$ $(j=1...J)$ en el instante $t$ $(t=1...T)$; esta variable se define si $f_{cj}=1$.

$de_{tj}$ — Déficit de la tarea $j$ $(j=1...J)$ en el período $t$ $(t=1...T)$, en relación con la capacidad deseada: $de_{tj} = \max\left\{0, dd_{tj} - \sum_{c=1 | f_{cj}=1}^{C} v_{tcj}\right\}, \ \forall t, \forall j$

$su_{tj}$ — Superávit de la tarea $j$ $(j=1...J)$ en el período $t$ $(t=1...T)$, en relación a la capacidad deseada: $su_{tj} = \max\left\{0, \sum_{c=1 | f_{cj}=1}^{C} v_{tcj} - dd_{tj}\right\}, \ \forall t, \forall j$

# 4 Formalización de los modelos de programación matemática

El objetivo es encontrar una asignación de horarios a los trabajadores de la cual resulte una presencia que respete, en la medida de lo posible, las capacidades mínimas y que supere, iguale o se acerque tanto como sea posible a las capacidades deseadas, teniendo en cuenta las preferencias de los trabajadores. La solución ideal sería aquella que no implicase ni déficits ni superávits de capacidad en ningún período, en la que los horarios asignados no tuviesen penalización y las prioridades de asignación de tareas fueran lo más altas posibles. En general, dicha solución no será factible: se debe definir una función objetivo que permita tener en cuenta la importancia relativa que el usuario otorga a los déficits de capacidad para cada tarea, a los superávits para cada tarea, a la penalización de los horarios asignados y a la prioridad de la asignación realizada.

Lo más sencillo sería introducir los déficits y los superávits en la función objetivo mediante un término lineal. Esta opción podría dar soluciones insatisfactorias por el hecho que el modelo consideraría indiferentes, por ejemplo, dos soluciones con una misma suma de los déficits o los superávits, con independencia de la distribución de este valor total entre los $T$ períodos. La pérdida del nivel de servicio es más que proporcional cuando aumenta el déficit, repartir regularmente el déficit y el superávit disminuye el deterioro del servicio. En consecuencia, los déficits y los superávits han de tener una repercusión no lineal en la función objetivo.

Las funciones no lineales que se proponen son las siguientes:

$\Phi(dd_{tj}, dm_{tj}, de_{tj})$ — Función no lineal convexa asociada al déficit, $de_{tj}$, de la tarea $j$ $(j=1...J)$ en el período $t$ $(t=1...T)$. Con esta función se evita que en una o pocas tareas se acumule todo el déficit $de_{tj}$ de manera muy irregular. Esta función, como se describe en el apartado 3.3, evita, cuando es posible, soluciones no factibles que no cumplan las condiciones de cota inferior de las capacidades ($dm_{tj}$); es decir, para intentar mantener el nivel de servicio mínimo.

$\Psi \left( dd_{tj}, su_{tj} \right)$ Función no lineal convexa asociada al superávit, $su_{tj}$, de la tarea *j (j=1...J)* en el período *t (t=1...T).* Con esta función se evita que en una o pocas tareas se acumule todo el superávit de manera muy irregular.

Con dichas funciones se dispone entonces de modelos de programación no lineal mixta (PNLM). Para su resolución se sustituye la función no lineal por una aproximación lineal, teniendo en cuenta la convexidad de la función objetivo; en consecuencia, las variables de déficit y de superávit se sustituyen en los modelos no lineales por una suma de variables, tal y como se detalla en el apartado 4.

## 4.1 Formalización de los modelos no lineales

El modelo no lineal tiene es el siguiente:

$$\begin{aligned}[MIN]Z = {} & \alpha d \cdot \left[ \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{J} \lambda d_j \cdot \Phi\left( dd_{tj}, dm_{tj}, de_{tj} \right) \right] + \\ & + \alpha s \cdot \left[ \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{J} \lambda s_j \cdot \Psi\left( dd_{tj}, su_{tj} \right) \right] + \\ & + \alpha b \cdot \left[ \sum_{i=1}^{W} \sum_{h=1}^{Hi} b_{ih} \cdot x_{ih} \right] - \alpha p \cdot \left[ \sum_{t=1}^{T} \sum_{c=1}^{C} \sum_{j=1 | f_{cj}=1}^{J} p_{cj} \cdot v_{tcj} \right] \end{aligned} \qquad (1)$$

$$\sum_{h=1}^{Hi} x_{ih} = 1 \qquad \forall i \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1 | f_{cj}=1}^{J} v_{tcj} = \sum_{i=1 | e_i=c}^{W} \sum_{h=1}^{Hi} a_{tih} \cdot x_{ih} \qquad \forall t, \forall c \qquad (3)$$

$$\sum_{c=1 | f_{cj}=1}^{C} \rho_{cj} \cdot v_{tcj} + de_{tj} - se_{tj} = dd_{tj} \qquad \forall t, \forall j \qquad (4)$$

$$x_{ih} \in \{0,1\} \qquad \forall i,\ h = 1...H_i \qquad (5)$$

$$v_{tcj} \geq 0 \text{ y entera} \qquad \forall t, \forall c, \forall j \mid f_{cj} = 1 \qquad (6)$$

$$de_{tj},\ su_{tj} \geq 0 \qquad \forall t, \forall j \qquad (7)$$

La expresión (1) corresponde a la función objetivo formada por cuatro componentes: déficit relativo, superávit relativo, penalización por asignar un horario determinado a un trabajador y prioridad; (2) impone que se asigna un horario y sólo uno a todo trabajador que esté presente en el centro en la semana en cuestión; (3) impone que cada categoría debe tener un número de tareas asignadas igual al número de trabajadores de esa categoría que tengan un horario asignado con presencia en ese instante de tiempo; (4) impone que el número de trabajadores de una categoría asignados a una tarea determinada -considerando su rendimiento en función de la categoría-, más el déficit o menos el superávit debe ser igual a la capacidad deseada; (5) expresa el carácter binario de las variables en cuestión; (6) expresa el carácter entero y no negativo de la variable $v_{tcj}$; y, finalmente, (7) expresa el carácter no negativo de las variables no enteras.

Si no se considera la eficiencia de los trabajadores, entonces $\rho_{cj} = 1 \; (\forall c, \forall j | f_{cj} = 1)$, en caso contrario la eficiencia tendría algún valor mayor o menor que la unidad ( $\rho_{cj} < 1$ ó > 1).

## 4.2 Formalización de la función no lineal convexa asociada al déficit

La elección de la función $\Phi$ condiciona el resultado. Se ha adoptado la siguiente función convexa (donde *dd* es la capacidad deseada, *dm* es la capacidad mínima y *de* es el déficit que resulta de la asignación de horarios):

Siendo el déficit relativo $\delta$:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \delta = \dfrac{de}{dd} & si & de > 0 \\ \delta = 0 & si & de = 0 \end{array} \right\}$$

y la función auxiliar:

$$\theta(dd, de) = \left( \frac{\delta}{1-\delta} \right) \cdot dd = \left( \frac{de}{dd - de} \right) \cdot dd$$

Para evitar la división por cero cuando $\delta = 1$, se ha introducido un parámetro $\varepsilon d$, con un valor muy pequeño (por ejemplo, 0.001).

$$\theta(dd, de) = \left( \frac{\delta}{1-\delta+\varepsilon d} \right) \cdot dd = \left( \frac{de}{dd - de + \varepsilon d} \right) \cdot dd$$

Una vez definido $\theta\left(dd_{tj}, de_{tj}\right)$, entonces:

$$\Phi(dd_{tj}, dm_{tj}, de_{tj}) = \left\{ \begin{array}{ll} \theta\left(dd_{tj}, de_{tj}\right) & si\,(dd_{tj}\text{-}de_{tj}) \geq dm_{tj} \\ \theta\left(dd_{tj}, dd_{tj} - dm_{tj}\right) + M \cdot \left[ \theta\left(dd_{tj}, de_{tj}\right) - \theta\left(dd_{tj}, dd_{tj} - dm_{tj}\right) \right] & si\,(dd_{tj}\text{-}de_{tj}) < dm_{tj} \end{array} \right\}$$

La función $\Phi$ es igual a la función $\theta$ excepto cuando los trabajadores asignados $\left(dd_{tj} - de_{tj}\right)$ a la tarea $j$ no cumplan con la condición de capacidad mínima $\left(dm_{tj}\right)$; en ese caso la pendiente de la función $\theta$ se multiplica por $M$. El valor del coeficiente de penalización, $M$, ha de ser un número suficientemente grande para conseguir una solución que cumpla las restricciones de cota inferior de capacidad frente a cualquier otra que las viole.

### 4.3 Formalización de la función no lineal convexa asociada al superávit

De manera análoga, con el objetivo de obtener un reparto homogéneo de los superávits relativos entre las diferentes tareas, si es el caso, se ha seleccionado la siguiente función no lineal convexa, $\Psi(dd_{tj}, su_{tj})$:

Siendo $\Gamma$ el superávit relativo, definido como:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Gamma_{tj} = \dfrac{su_{tj}}{D_k + su_{tj}} & si \quad su_{tj} > 0 \\ \Gamma_{tj} = 0 & si \quad su_{tj} = 0 \end{array} \right\}$$

entonces:

$$\Psi(dd_{tj}, su_{tj}) = \left( \frac{\Gamma_{tj}}{1-\Gamma_{tj}} \right) \cdot \left( dd_{tj} + su_{tj} \right) = \left( \frac{su_{tj}}{dd_{tj}} \right) \cdot \left( dd_{tj} + su_{tj} \right)$$

De forma similar al caso anterior, también se tiende a igualar, para todos los períodos, los cocientes $\dfrac{dd_{tj} + su_{tj}}{dd_{tj}}$ (es decir, la proporción de la presencia deseada que se consigue con la solución).

Para obtener unos valores suficientemente grandes cuando $\Gamma \to 1$, se propone la siguiente modificación en la función $\Psi$:

$$\Psi(dd_{tj}, su_{tj}) = \left( \frac{\Gamma_{tj}}{1-\Gamma_{tj} + \varepsilon s} \right) \cdot \left( dd_{tj} + su_{tj} \right)$$

En la modificación propuesta el valor de $\varepsilon s$ ha de ser pequeño, por ejemplo 0.001.

## 5. Modelos de programación matemática linealizados

Para linealizar el componente de la función objetivo asociado al déficit y dado su carácter convexo, se utiliza la programación separable convexa; para ello se descompone cada variable de déficit en tantos sumandos como el menor entero que sea igual o mayor que su cota superior.

En el caso general, para todo instante *t* y toda tarea *j*, supongamos que *de* es su variable de déficit, la capacidad deseada *dd* es su cota superior y $udc = \lceil dd \rceil$ (es el mínimo valor entero igual o superior a la capacidad deseada *dd*); entonces se hace la sustitución:

$$de = \sum_{k=1}^{udc} d_k \text{, con } 0 \le d_k \le udk_k \text{, siendo } udk_k\text{:}$$

$$udk_1 = 1 + dd - udc$$
$$udk_k = 1, \text{ si } k \ge 2$$

Es decir, la cota superior $udk_k$ de la variable $d_k$ es igual a la unidad, con la excepción de la cota superior de $d_1$ cuando la capacidad deseada $dd$ no es entera: en este caso la cota superior $udk_1$ adopta el valor de la parte fraccionaria de $dd$.

El coeficiente de $d_k$ en la función objetivo es igual a la pendiente de la quebrada en el tramo correspondiente, es decir:

$$\varphi\left(d_k\right)=\frac{\Phi(dd,dm,\sum_{q=1}^{k}udk_q)-\Phi(dd,dm,\sum_{q=1}^{k-1}udk_q)}{udk_k}$$

De manera análoga, con el objetivo de obtener un reparto homogéneo de los superávits, si es el caso, se ha seleccionado la función no lineal y convexa, $\Psi(su_{tj})$, y se ha utilizado la programación separable convexa. Para linealizar el componente de la función objetivo asociado al superávit, se descompone cada variable de superávit en tantos sumandos como el menor entero que sea igual o mayor que su cota superior.

En el caso general, para todo instante $t$ y toda tarea $j$, supongamos que $su$ es su variable de déficit, y $usc=\lceil capacidad\_máxima\_sobrante\rceil$ (es el mínimo valor entero igual o superior a la capacidad máxima, que tiene en cuenta la capacidad deseada en el período, $dd$, y el número de trabajadores que por su categoría podrían realizar esa tarea y por su conjunto de horarios podrían tener presencia en ese período); entonces se hace la sustitución:

$$su=\sum_{k=1}^{usc}s_k \text{, con } 0\le s_k\le usk_k \text{, siendo } usk_k\text{:}$$

$$usk_1=1+capacidad\_máxima\_sobrante-usc$$

$$usk_k=1, \text{ si } k\ge 2$$

Es decir, la cota superior $usk_k$ de la variable $s_k$ es igual a la unidad, con la excepción de la cota superior de $s_1$ cuando la capacidad máxima no es entera: en este caso la cota superior $usk_1$ adopta el valor de la parte fraccionaria de la capacidad máxima sobrante.

El coeficiente de $s_k$ en la función objetivo es igual a la pendiente de la quebrada en el tramo correspondiente, es decir:

$$\psi\left(s_k\right)=\frac{\Psi(dd,\sum_{q=1}^{k}usk_q)-\Psi(dd,\sum_{q=1}^{k-1}usk_q)}{usk_k}$$

## 5.1 Nuevos datos de los modelos linealizados

A continuación se exponen los nuevos datos a considerar:

$udc_{tj}$ — Mínimo valor entero igual o superior a la capacidad deseada para cada tarea $j$ $(j=1...J)$ en todo período $t$ $(t=1...T)$: $udc_{tj}=\lceil dd_{tj}\rceil,\ \forall t,\forall j$.

$udk_{tjk}$ Cota superior de la k-ésima variable de déficit, $d_{tjk}$, para la tarea $j$ $(j=1...J)$ en el período $t$ $(t=1...T)$ y con $k$ $(k=1...\ udc_{tj})$ y que adopta los siguientes valores:

- si $k=1$ entonces $udk_{tjk}= 1 + dd_{tj} - udc_{tj}, \forall t, \forall j$ .
- si $k\geq 2$ entonces $udk_{tjk}= 1, \forall t, \forall j$ .

$us_{tj}$ Superávit máximo definido como el máximo entre 0 y la capacidad_máxima_sobrante:

$$us_{tj} = Max\left( \sum_{i=1 \mid \exists h \in H_i : a_{tih}=1}^{W} f_{e_i,j} - dd_{tj}, 0 \right), \forall t, \forall j \; .$$

Es la cota superior del superávit.

$usc_{tj}$ Mínimo valor entero igual o superior al superávit máximo $us_{tj}$ para cada tarea $j$ $(j=1...J)$ en el período $t$ $(t=1...T)$: $usc_{tj} = \lceil us_{tj} \rceil, \forall t, \forall j$ .

$usk_{tjk}$ Cota superior de la k-ésima variable de déficit, $s_{tjk}$, para cada tarea $j$ $(j=1...J)$ en todo período $t$ $(t=1...T)$ y con $k$ $(k=1...\ usc_{tj})$ y se define como sigue:

- si $k=1$ entonces $usk_{tjk}= 1 + us_{tj} - usc_{tj}, \forall t, \forall j$ .
- si $k\geq 2$ entonces $usk_{tjk}= 1, \forall t, \forall j$ .

## 5.2 Nuevas variables del modelo

A continuación se exponen las variables a considerar en el modelo de los casos CR y CNR:

$x_{ih} \in \{0,1\}$ $x_{ih}=1$ si y sólo si se asigna el horario $h$ $(1...H_i)$ al trabajador $i$ $(i=1...W)$.

$v_{tcj}$ variable entera que indica el número de trabajadores de la categoría $c$ $(c=1...C)$ dedicados a realizar la tarea $j$ $(j=1...J)$ en el instante $t$ $(t=1...T)$; esta variable se define si $f_{cj}=1$.

$d_{tjk}$ k-ésima variable de déficit de la tarea $j$ $(j=1...J)$ en el período $t$ $(t=1...T)$, con $k$ $(k=1...\ udc_{tj})$ y en relación a la capacidad deseada:

$$\sum_{k=1}^{udc_{tj}} d_{tjk} = \max\left\{ 0, dd_{tj} - \sum_{c=1 \mid f_{cj}=1}^{C} v_{tcj} \right\}, \ \forall t, \forall j$$

$s_{tjk}$ k-ésima variable de superávit de la tarea $j$ $(j=1...J)$ en el período $t$ $(t=1...T)$, con $k$ $(k=1...\ usc_{tj})$ y en relación a la capacidad deseada:

$$\sum_{k=1}^{usc_{tj}} s_{tjk} = \max\left\{ 0, \sum_{c=1 \mid f_{cj}=1}^{C} v_{tcj} - dd_{tj} \right\}, \ \forall t, \forall j$$

## 5.3 Formalización del modelo linealizado de los casos CR-CNR con tareas asignadas a categorías con y sin rendimiento

El modelo que resulta es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
[MIN]Z = {} & \alpha d \cdot \left[ \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{J} \lambda d_j \cdot \sum_{k=1}^{udc_{tj}} \varphi_{tjk} \cdot d_{tjk} \right] + \\
& + \alpha s \cdot \left[ \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{J} \lambda s_j \cdot \sum_{k=1}^{usc_{tj}} \psi_{tjk} \cdot s_{tjk} \right] + \\
& + \alpha b \cdot \left[ \sum_{i=1}^{W} \sum_{h=1}^{Hi} b_{ih} \cdot x_{ih} \right] - \alpha p \cdot \left[ \sum_{t=1}^{T} \sum_{c=1}^{C} \sum_{j=1 | f_{cj}=1}^{J} p_{cj} \cdot v_{tcj} \right]
\end{aligned} \qquad (8)
$$

$$\sum_{h=1}^{Hi} x_{ih} = 1 \qquad \forall i \qquad (9)$$

$$\sum_{j=1 | f_{cj}=1}^{J} v_{tcj} = \sum_{i=1 | e_i=c}^{W} \sum_{h=1}^{Hi} a_{tih} \cdot x_{ih} \qquad \forall t, \forall c \qquad (10)$$

$$\sum_{c=1 | f_{cj}=1}^{C} \rho_{cj} \cdot v_{tcj} + \sum_{k=1}^{udc_{tj}} d_{tjk} - \sum_{k=1}^{usc_{tj}} s_{tjk} = dd_{tj} \qquad \forall t, \forall j \qquad (11)$$

$$0 \le d_{tjk} \le udk_{tjk} \qquad k = 1,...,udc_{tj} \qquad \forall t, \forall j \qquad (12)$$

$$0 \le s_{tjk} \le usk_{tjk} \qquad k = 1,...,usc_{tj} \qquad \forall t, \forall j \qquad (13)$$

$$x_{ih} \in \{0,1\} \qquad \forall i,\ h = 1...H_i \qquad (14)$$

$$v_{tcj} \ge 0 \text{ y entera} \qquad \forall t, \forall c, \forall j \mid f_{cj} = 1 \qquad (15)$$

La expresión (8) corresponde a la función objetivo formada por cuatro componentes: déficit, superávit, penalización por asignar un horario determinado a un trabajador y prioridad; (9) impone que se asigna un horario y sólo uno a todo trabajador que esté presente en el centro en la semana en cuestión; (10) impone que cada categoría debe tener un número de tareas asignadas igual al número de trabajadores de esa categoría que tengan un horario asignado con presencia en ese instante de tiempo; (11) impone que el número de trabajadores de una categoría asignados a una tarea determinada -considerando su rendimiento en función de la categoría-, más el déficit o menos el superávit debe ser igual a la capacidad deseada; (12) y (13) imponen las cotas inferiores y superiores de las variables de déficit y de superávit, respectivamente; (14) expresa el carácter binario de las variables; y (15) expresa el carácter entero y no negativo de la variable $v_{tcj}$.

## 6 Resultados y conclusiones

Se ha implementado el modelo propuesto con ILOG-OPL y se ha utilizado la librería del sistema ILOG-CPLEX Network Optimizer 7.5. Se ha ejecutado en un PC-Celeron a 1 GHz y 256 Mb de RAM.

Se han utilizado datos reales procedente de una empresa de servicios, correspondiente a 15 semanas, con las siguientes características:

- 4 tipos de contrato: 40, 30, 24 y 12 horas/semana.
- Tres categorías y tres tareas, con prioridades y rendimientos conocidos.
- Horario de 7:00 a 22:00 de lunes a sábado, con períodos de una hora de duración. En total: 90 períodos.
- 226 horarios posibles diferentes en total, con la posibilidad de asignar preferencias por parte de los trabajadores.
- Capacidad entera mínima y deseada conocida para cada hora de los 90 períodos de cada semana.

A partir de los datos reales se han generado ejemplares con 50, 100 y 150 trabajadores. El resultado obtenido de la experiencia computacional es satisfactorio.


**Agradecimientos**

Este documento se ha realizado con el soporte del proyecto DPI2001-2176.


**Referencias**


[1] Blossom, A.P. (1998). The last mile problem in operations research (working paper).

[2] Abernathy, W.J., Baloff, N., Hershey, J.C., Wandel, S. (1973). A three-stage manpower planning and scheduling model – a service-sector example, Operations Research 21, 693-711.

[3] Siferd, S.P., Benton, W.C. (1992). Workforce staffing and scheduling: Hospital nursing specific models, European Journal of Operational Research 60, 233-246.

[4] Buffa, E.S., Cosgrove, M.J., Luce, B.J. (1976). An Integrated Work Shift Scheduling System, Decision Sciences, 7, 4, 620-630.

[5] Hung, R. (1999). Scheduling a workforce under annualized hours. International Journal of Production Research, v37, n11. Pag: 2419-2427

[6] Corominas, A., Lusa, A., Pastor, R. (2002). Using MILP to plan annualised working hours, Journal of the Operational Research Society, Vol. 53, Num. 10, pp. 1101-1108.

[7] Campbell, G.M., Diaby, M. (2002). Development and evaluation of an assignment heuristic for allocation cross-trained workers, European Journal of Operational Research 138, 9-20.