IX Congreso de Ingeniería de Organización
Gijón, 8 y 9 de septiembre de 2005

Programación de trabajos en máquinas paralelas con velocidad dependiente de la asignación de recursos limitados

•Raúl Cortés[1], José Pedro García[1], Rafael Pastor[2], Carlos Andrés[1]

[1] Dpto. de Organización de Empresas, Economía financiera y Contabilidad. Universidad Politécnica de Valencia. rcortes@omp.upv.es, jpgarcia@omp.upv.es, candres@omp.upv.es
[2] Dpto. de Organización de Empresas. Universidad Politécnica de Cataluña. rafael.pastor@upc.edu

Resumen

El presente trabajo analiza el problema de asignación y secuenciación de trabajos en máquinas paralelas, donde los tiempos de proceso de cada trabajo son dependientes da la asignación de un determinado recurso que se encuentra en cantidad limitada. En particular, se considera el objetivo de minimizar la suma total ponderada de los tiempos de retraso o adelanto para cada trabajo con respecto a su fecha de entrega. Previamente al desarrollo del modelo, se presenta un completa revisión de los trabajos que hasta la fecha han analizado los problemas de programación de trabajos considerando tiempos de proceso dependientes de la asignación de recursos. Finalmente, se presenta un modelo original para el problema propuesto.

Palabras clave: Secuenciación, máquinas paralelas, recursos limitados

1. Introducción

Por lo general, en los problemas de programación de talleres, los tiempos de proceso de las tareas se consideran como un parámetro de entrada fijo. Sin embargo, en multitud de entornos productivos ocurre que es posible controlar estos tiempos de proceso, mediante la asignación de determinados recursos que se encuentran disponibles, reduciendo o aumentando los tiempos de proceso en función de la cantidad de recursos asignados al procesado de la tarea. En estos casos se plantea, junto al problema de programación de trabajos en las máquinas, el problema de asignación de recursos que, por lo general, aumenta considerablemente la complejidad del problema.

El problema consiste en programar un conjunto de trabajos $\mathcal{N}=\{1,2,..,n\}$, en un total de m máquinas paralelas no relacionadas. Por lo general, cuando se habla de máquinas paralelas, se distinguen tres casos generalizados en función de los tiempos de proceso de los trabajos en las máquinas. Cuando los tiempos de proceso de los trabajos son independientes de la máquina en la que se procesan, se habla de máquinas paralelas idénticas ($p_{ij} = p_i \ \forall j$). Se denominan máquinas paralelas proporcionales, cuando el tiempo de proceso de los trabajos depende de la velocidad de la máquina ($p_{ij} = \frac{p_i}{s_j}$). Como máquinas paralelas no relacionadas se entiende que, dado un determinado par de trabajos y un determinado par de máquinas, no existe

• Este trabajo se deriva de la participación y puesta en común de sus autores en dos proyectos de investigación financiados por MCYT cofinanciados por FEDER con referencias DPI2004-02598 y DPI2004-03472

relación de proporcionalidad entre los tiempos de proceso de los dos trabajos en cada una de las dos máquinas. Para el conjunto de trabajos se emplearán los índices *i* y *l*, mientras que para las máquinas se empleará el índice *j*.

Cada tarea ha de ser procesada sin interrupción en alguna de las máquinas, y cada máquina puede procesar un único trabajo a la vez. Para procesar los trabajos en las máquinas se dispone de un único tipo de recursos, discretos y renovables, para el que se empleará el índice *r,* que indicará la cantidad de unidades de recurso empleadas. Llamaremos *R* al cantidad disponible de este recurso, que permanecerá constante durante todo el horizonte de planificación. Como se ha comentado anteriormente, el tiempo de proceso del trabajo *i* en la máquina *j* depende de la cantidad de recurso *r* asignado a la máquina. Así, el tiempo de proceso se denominará P_{ijr}. En particular, en el problema analizado en el presente trabajo, una vez definida la asignación de recursos a una máquina, ésta permanece constante para procesar todas las tareas asignadas a esta máquina. Cuando se procesa la última tarea en la secuencia de esta máquina, los recursos no serán empleados en ninguna otra tarea. Por último, para cada trabajo i en cada máquina j existe una cantidad mínima $Rmin_{ij}$ y una cantidad máxima $Rmax_{ij}$ de unidades de recurso con la que se puede procesar ese trabajo en esa máquina

Por otro lado, para cada trabajo existe una fecha de entrega programada (D_i), y unos ponderadores por adelanto o finalización (a_i, b_i) por las diferencias entre su fecha de finalización real y la fecha de entrega pactada. De esta forma, siendo C_i la fecha de finalización del trabajo *i*, se define E_i=max $\{0, D_i-C_i\}$ y T_i= max $\{0, C_i-D_i\}$ como los tiempos de adelanto y de retraso del trabajo *i* respectivamente.

De acuerdo con la notación introducida por Graham. (1979), el problema planteado se define como $R|\ res\ |\ \sum_i (a_i E_i + b_i T_i)$. Con respecto a su complejidad algorítmica, este problema pertenece al conjunto NP-*Hard*, véase Chen (2004), puesto que el mismo problema sin la complejidad añadida de la asignación de recursos ya es NP-*Hard.*

La resolución del problema planteado resulta de gran interés puesto que se trata de una situación que aparece con frecuencia en entornos industriales, y asumiendo ciertas simplificaciones puede ser adaptado a diversas condiciones particulares.

2. El problema de los tiempos de proceso dependientes de la asignación de recursos

El primer trabajo que describe tiempos de proceso variables en función de la asignación de recursos es debido a Vickson (1980). Desde entonces, y en especial durante la década de los '90, el problema ha recibido una atención creciente. A pesar de ello, dentro del conjunto de problemas que contemplan la asignación de recursos, aparecen importantes distinciones en las hipótesis de partida (como las características del recurso, configuración de las máquinas, etc.) que dan lugar a la existencia de múltiples enfoques del problema.

En primer lugar, en cuanto a las características de los recursos es habitual la distinción entre recursos renovables y recursos no renovables. En general, cuando se trabaja con recursos renovables, la cantidad total del recurso se encuentra limitada (como ocurre por ejemplo con la mano de obra), y los tiempos de proceso puede tomar *k* valores que son función de la cantidad de recursos asignada (ver Daniels et al. 1996, 1997). En Kellerer y Strusevich (2003) se analiza el caso particular en el que se trabaja con un recurso renovable y limitado, aunque los tiempos de proceso no son dependientes de su asignación. Posteriormente Kellerer y

Strusevich (2004) extienden el trabajo a la consideración de múltiples recursos. Este tipo particular de problemas aparece en la literatura como programación de tareas con limitación de recursos. Por otro lado, los recursos no renovables (como puede ser por ejemplo el suministro eléctrico o el combustible), implican por lo general que el tiempo de proceso de los trabajos pueda tomar cualquier valor entre un máximo y un mínimo, es decir, $P_i \in [a_i, b_i]$. El consumo de este tipo de recursos suele aparecer reflejado como un coste en la función objetivo. Algunos trabajos interesantes considerando recursos no renovables son Alidaee y Ahmadian (1993), Cheng et al. (1996) y Cheng et al. (1998), entre otros.

En segundo lugar, en lo que hace referencia a tipos y disposición de máquinas, en el presente trabajo se ha prestado especial atención a los problemas con tiempos de proceso dependientes de la asignación de recursos en los que aparecen máquinas en paralelo. Una revisión muy completa de los trabajos que hacen referencia a máquinas paralelas se puede encontrar en Mokotoff (2001). Al parecer, sólo Trick (1994) considera el problema de asignación de recursos con máquinas paralelas no relacionadas. Alidaee y Ahmadian (1993) y Chen (2004) analizan el problema con máquinas paralelas e idénticas. Mediante una interesante transformación Chen extiende sus anteriores trabajos en el ámbito de las máquinas paralelas, a la consideración del problema de asignación de recursos, véase Chen y Powell (1999). Así, en Chen (2004) extiende ésta línea de trabajo que le ha aportado interesantes resultados y que consiste en transformar el problema en un problema de cubrimiento. Mediante este método, se resuelve en primer lugar el problema lineal relajado, para posteriormente mediante técnicas como ramificación y corte o planos cortantes, obtener una solución entera al problema de cubrimiento. En los trabajos de Daniels et al. (1996, 1997) y de Kellerer y Strusevich (2003, 2004) se consideran máquinas dedicadas, es decir, la asignación de los trabajos a las máquinas está previamente definida. Daniels y Mazzola (1994) y Nowicki (1994) consideran el problema para configuraciones tipo taller de flujo. Por último, Cheng et al. (1996,1998) estudia el problema para una máquina.

En tercer lugar, en cuanto a trabajos, en problemas que tienen en cuenta la asignación de recursos, no es habitual considerar la existencia de interrupciones. Sólo los trabajos Kellerer y Strusevich (2003, 2004) consideran esta posibilidad.

Por último, en lo que hace referencia a la función objetivo son habituales las funciones objetivo clásicas de los problemas de programación de talleres. Los trabajos Daniels y Mazzola (1994), Daniels et al. (1996, 1997) y Kellerer y Strusevich (2003, 2004) buscan la minimizar el *Cmax*. En general, cuando los recursos son renovables, el nº máximo de recursos disponibles se considera una limitación que aparece como una restricción al problema, y no en la función objetivo. En cambio, en los trabajos que consideran recursos no renovables, suele aparecer un coste en la función objetivo relacionado con el consumo del recurso considerado. En realidad, en la mayoría de los casos se suele considerar una función de costes combinada, que consiste en un coste relacionado con el consumo de recursos y un coste relacionado con la programación de los trabajos, que hay que minimizar. Así, en Alidaee y Ahmadian (1993) el objetivo es minimizar los costes de producción (relacionados con el consumo de recurso) y el coste total de adelantos y retrasos en la finalización de los trabajos. De forma similar, Trick (1994) considera la minimización de los costes de proceso más el *Cmax,* y en Chen (2004) y Cheng et al. (1996) el objetivo es minimizar el coste de asignación de recursos más el coste ponderado de los retrasos.

Habitualmente, los problemas de programación de talleres, debido a su elevada complejidad algorítmica, se abordan por medio de procedimientos heurísticos cuyo rendimiento se evalúa mediante ratios que permiten la comparación. Sólo Daniels y Mazzola (1994), Daniels et al. (1996, 1997) y Chen (2004) han trabajado con algoritmos para su resolución de forma óptima, para la resolución de estos problemas cuya complejidad, que como se ha mencionado, son NP-*Hard.* En opinión de los autores, no aparece en la literatura una formulación para el problema de minimizar una función objetivo relacionada con las fechas de entrega de los trabajos, en talleres con máquinas paralelas no relacionadas, en el que los tiempos de proceso de las tareas sean dependientes de la asignación de recursos.

3. Formulación del modelo

Además de los índices y parámetros definidos en la sección 1, definiremos el índice *k=1,…,n*, para especificar la posición que ocupa un determinado trabajo en la secuencia de los trabajos de una máquina. Por último, para expresar el modelo, será necesario definir las siguientes variables binarias:

$$x_{ijkr}\begin{cases}1, \textit{si el trabajo } i \textit{ se procesa en la máquina } j \textit{ en la posición } k \textit{ con } r \textit{ unidades de recurso}\\ 0, \textit{en caso contrario}\end{cases}$$

$$y_{jr}\begin{cases}1, \textit{si a la máquina } j \textit{ se asignan } r \textit{ unidades de recurso}\\ 0, \textit{en caso contrario}\end{cases}$$

Además definiremos un variable auxiliar ∂_{iljk} para expresar la siguiente condición, que aparecerá expresada en el modelo mediante las restricciones (8) y (9).

$$x_{ijkr} \wedge x_{ljk-1r} = 1 \rightarrow C_l + P_{ijr} \leq C_i \tag{1}$$

Para ello, se define:

$$\partial_{iljkr}\begin{cases}1, \textit{si } x_{ijkr} = x_{ljk-1r} = 1\\ 0, \textit{en caso contrario}\end{cases}$$

De este modo, el problema descrito se puede plantear del siguiente modo:

$$\min \sum_{i=1}^{n} (a_i E_i + b_i T_i) \tag{2}$$

s.a.

$$E_i \geq D_i - C_i \quad \forall i \tag{3}$$

$$T_i \geq C_i - D_i \quad \forall i \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=R\min_{ij}}^{R\max_{ij}} x_{ijkr} = 1 \quad \forall i \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=R\min_{ij}}^{R\max_{ij}} x_{ijkr} \le 1 \quad \forall k, \forall j \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=R\min_{ij}}^{R\max_{ij}} x_{ijk+1r} \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{r=R\min_{ij}}^{R\max_{ij}} x_{ijkr} \quad \forall j,k \tag{7}$$

$$\sum_{r=R\min_{ij}}^{R\max_{ij}} x_{ijkr} + \sum_{r=R\min_{lj}}^{R\max_{lj}} x_{ljk-1r} - \partial_{iljk} \le 1 \quad \forall i,l,j,k \tag{8}$$

$$C_l + \sum_{r=R\min_{ij}}^{R\max_{ij}} x_{ijkr} \cdot P_{ijr} + M \cdot \partial_{iljk} \le M + C_i \quad \forall i,l,j,k \tag{9}$$

$$C_i \ge \sum_{j=1}^{m}\sum_{r=R\min_{ij}}^{R\max_{ij}} x_{ij1r} \cdot P_{ijr} \quad \forall i \tag{10}$$

$$\sum_{r=1}^{R} y_{jr} \le 1 \qquad \forall j \tag{11}$$

$$\sum_{r=R\min_{ij}}^{R\max_{ij}} \sum_{k=1}^{n} r \cdot x_{ijkr} \le \sum_{r=1}^{R} r \cdot y_{jr} \quad \forall j,i \tag{12}$$

$$R - \sum_{r=R\min_{ij}}^{R\max_{ij}} \sum_{k=1}^{n} (r-R) \cdot x_{ijkr} \ge \sum_{r=1}^{R} r \cdot y_{jr} \quad \forall j,i \tag{13}$$

$$\sum_{r=1}^{R}\sum_{j=1}^{m} r \cdot y_{jr} \le R$$

(14)

$$T_i, E_i, C_i \ge 0 \qquad \forall i \tag{15}$$

Siendo M una cota superior para el máximo tiempo de proceso de máquina.

Las restricciones (3), (4) y (15) expresan el retraso y adelanto de los trabajos forzando $E_i = \max_i(0, D_i - C_i)$ y $T_i = \max_i(0, C_i - D_i)$. Por otro lado, el conjunto de restricciones expresadas mediante (5) expresan que cada trabajo se ha de procesar una única vez. Las restricciones definidas en (6) aseguran que se procesará como máximo un trabajo en la posición *k-ésima* en la máquina *j*. Las restricciones (7) fuerzan a que las posiciones de los trabajos en la secuencia de una máquina sean ocupadas consecutivamente. Las restricciones (8), (9) y (10), se refieren al instante de finalización de los trabajos. Mediante la variable ∂_{iljk}, en las restricciones (8) y (9) se fuerza la condición expresada en (1), mientras que en (10) se define el instante de finalización de los trabajos procesados en primera posición.

En cuanto a los recursos, el conjunto de restricciones expresadas en (11) aseguran como máximo una asignación de recursos para cada máquina. La restricciones (12) y (13), fuerzan el hecho de que todos los trabajos asignados a una máquina son procesados exactamente con la misma cantidad de unidades de recursos, que son precisamente las unidades de recurso asignadas a esa máquina. Por último, la restricción (14) limita la cantidad total de unidades de recursos asignadas al conjunto de las máquinas.

4. Conclusiones

Se han analizado los diferentes estudios relacionados con programación de talleres con tiempos de proceso dependientes de la asignación de recursos, y los diferentes enfoques que se han dado a problemas similares en esta área. Se ha presentado un modelo original para la minimización de una función objetivo referida a fechas de entrega, en un entorno de máquinas paralelas no relacionadas, considerando la secuenciación de trabajos y asignación de recursos a máquinas. Debido a la estructura del modelo, parece poco probable que sea posible encontrar soluciones óptimas a problemas de gran tamaño, en tiempos razonables. Actualmente, se están llevando experimentos para comprobar el comportamiento del modelo con respecto al tamaño del problema. Una interesante línea de trabajo es el desarrollo de algoritmos particulares para la resolución de problemas de gran tamaño, que proporcionen mejores rendimientos en cuanto a los tiempos de resolución.

Referencias

Alidaee, B., Ahmadian, A. (1993), 2 Parallel Machine Sequencing Problems Involving Controllable Job Processing Times, *European Journal of Operational Research*, vol. 70, no. 3, pp. 335-341.

Chen, Z. L., Powell, W. B. (1999), Solving parallel machine scheduling problems by column generation, *Informs Journal on Computing*, vol. 11, no. 1, pp. 78-94.

Chen, Z. L. (2004), Simultaneous job scheduling and resource allocation on parallel machines, *Annals of Operations Research*, vol. 129, no. 1-4, pp. 135-153.

Cheng, T. C. E., Chen, Z. L., Li, C. L. (1996), Single-machine scheduling with trade-off between number of tardy jobs and resource allocation, *Operations Research Letters*, vol. 19, no. 5, pp. 237-242.

Cheng, T. C. E., Janiak, A., Kovalyov, M. Y. (1998), Bicriterion single machine scheduling with resource dependent processing times, *Siam Journal on Optimization*, vol. 8, no. 2, pp. 617-630.

Daniels, R. L., Mazzola, J. B. (1994), Flow-Shop Scheduling with Resource Flexibility, *Operations Research*, vol. 42, no. 3, pp. 504-522.

Daniels, R. L., Hoopes, B. J., Mazzola, J. B. (1996), Scheduling parallel manufacturing cells with resource flexibility, *Management Science*, vol. 42, no. 9, pp. 1260-1276.

Daniels, R. L., Hoopes, B. J., Mazzola, J. B. (1997), An analysis of heuristics for the parallel-machine flexible-resource scheduling problem, *Annals of Operations Research*, vol. 70, pp. 439-472.

Graham, R.L., Lawler E.L, Lenstra, J.K. and Rinnooy Kan A.H.G. (1979), Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: A survey. *Ann. Discrete Mathematics*, 5:287-326.

Kellerer, H., Strusevich, V. A. (2003), Scheduling problems for parallel dedicated machines under multiple resource constraints, *Discrete Applied Mathematics*, vol. 133, no. 1-3, pp. 45-68.

Kellerer, H., Strusevich, V. A. (2003), Scheduling parallel dedicated machines under a single non-shared resource, *European Journal of Operational Research*, vol. 147, no. 2, pp. 345-364.
Mokotoff, E. (2001), Parallel machine scheduling problems: A survey, *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, vol. 18, no. 2, pp. 193-242.
Trick, M. A. (1994), Scheduling Multiple Variable-Speed Machines, *Operations Research*, vol. 42, no. 2, pp. 234-248.
Nowicki, E. (1993), An Approximation Algorithm for the M-Machine Permutation Flow-Shop Scheduling Problem with Controllable Processing Times, *European Journal of Operational Research*, vol. 70, no. 3, pp. 342-349.
Vickson, R. G. (1980), 2 Single-Machine Sequencing Problems Involving Controllable Job Processing Times, *Aiie Transactions*, vol. 12, no. 3, pp. 258-262.