

## **Modelo de Programación Matemática del Problema de Equilibrado de Líneas con Subgrafos de Montaje Alternativos\***

**Liliana Capacho Betancourt<sup>1</sup>, Rafael Pastor Moreno<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Dpto. de Investigación de Operaciones, EISULA y CESIMO – Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela. liliana.capacho@upc.edu

<sup>1,2</sup> Instituto de Organización y Control de Sistemas Industriales, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, España. <sup>2</sup> rafael.pastor@upc.edu.

### **Resumen**

*El problema clásico de equilibrado de líneas de montaje (ALBP) consiste, básicamente, en asignar un conjunto de tareas a un conjunto de estaciones de trabajo, considerando un diagrama de precedencias predeterminado. El problema de equilibrado de líneas con subgrafos de montaje alternativos (ASALBP), presentado en Capacho y Pastor (2005), es un ALBP que considera subgrafos de precedencias alternativos los cuales representan variantes del proceso de montaje. Además, se considera que los tiempos de proceso y/o las relaciones de precedencia de las tareas dependen del subgrafo de montaje seleccionado. De esta manera, el ASALBP implica resolver simultáneamente dos problemas: uno, seleccionar el subgrafo de montaje, el cual determina el orden y duración de las tareas; y dos, equilibrar la línea, es decir, asignar las tareas a las estaciones de manera que se optimice cierto objetivo, como por ejemplo, minimizar el número de estaciones dado un tiempo ciclo o minimizar el tiempo ciclo dado el número de estaciones. En este trabajo se presenta un modelo de programación matemática desarrollado para resolver el ASALBP.*

**Palabras clave:** Equilibrado de líneas de montaje.

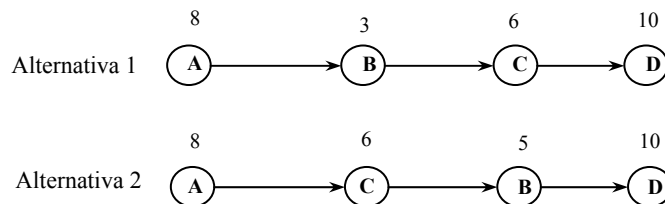
### **1. Problema de Equilibrado de Líneas con Subgrafos de Montaje Alternativos**

El problema clásico de equilibrado de líneas de montaje (ALBP) consiste en asignar un conjunto de tareas a un conjunto de estaciones de trabajo, manteniendo las relaciones de precedencia entre las tareas. Tradicionalmente, los ALBPs consideran que el proceso de montaje esta caracterizado por un diagrama de precedencias que determina las relaciones entre las tareas requeridas para ensamblar un producto. Sin embargo, en algunos casos se pueden presentar problemas en los que se dispongan variantes del proceso de montaje de un producto, que son alternativas entre sí. El problema de equilibrado de líneas con subgrafos de montaje alternativos ASALBP, presentado en Capacho y Pastor (2005), es un ALBP en el que se consideran alternativas de proceso, en donde cada alternativa esta representada por un subgrafo de precedencias (denominado subgrafo de montaje). El problema ASALBP también considera que los tiempos de proceso de las tareas no son fijos, como se establece en la mayoría de los problemas tratados en la literatura, sino que dependen del orden en el que las tareas son procesadas, es decir, dependen del subgrafo de montaje seleccionado.

---

\* Este trabajo se deriva de la participación de sus autores en un proyecto de investigación financiado por MCYT con referencia DPI2004-03472, cofinanciado por FEDER.

Por otra parte, cuando se presentan alternativas de montaje, el procedimiento que el diseñador del sistema suele utilizar, para resolver el problema, es seleccionar a priori una de las alternativas y después equilibrar la línea de montaje. Este procedimiento, no tiene en cuenta las repercusiones que podría tener un subgrafo de montaje alternativo, en el equilibrado de la línea: el sistema se puede sub-optimizar ya que una alternativa puede ser descartada por tener, por ejemplo, un tiempo de proceso total mayor, cuando en realidad puede proporcionar la mejor solución del problema, es decir, requerir, menos estaciones de trabajo. Considérese el ejemplo de la figura 1 que representa un proceso de montaje que consta de 4 tareas, las cuales pueden procesarse de dos formas alternativas.



**Figura 1.** Alternativas de montaje.

En la tabla 1 se muestran los resultados al equilibrar de manera óptima los dos problemas alternativos resultantes de la figura 1, con un tiempo ciclo de 15 unidades de tiempo.

**Tabla 1.** Resultados del ejemplo de la figura 1

Alternativa de montaje	Actividades por estación (tiempo)			Tiempo total de proceso	Número de estaciones
	I	II	III		
1	A,B (11)	C (6)	D (10)	27	3
2	A,C (14)	B,D (15)	-	29	2

Si se considera el procedimiento de seleccionar a priori una de las alternativas disponibles, posiblemente se habría seleccionado la alternativa 1, por ser la que tiene el menor tiempo total de proceso; sin embargo, si se considera el proceso de selección del subgrafo de montaje junto al proceso de equilibrado de la línea, la alternativa 2 proporciona una mejor solución, puesto que sólo requiere dos estaciones en lugar de las tres que requiere la alternativa 1.

De esta forma, para resolver el ASALBP, se deben resolver simultáneamente dos subproblemas: uno, seleccionar el subgrafo de montaje, que determina el orden de proceso de las tareas y dos, equilibrar la línea, lo que implica asignar las tareas a las estaciones de manera que se optimice cierta medida de eficiencia. Cuando el objetivo es minimizar el número de estaciones de trabajo, dado un tiempo ciclo, el problema se denomina ASALBP-1; en caso contrario, si el objetivo es minimizar el tiempo ciclo dado el número de estaciones, el problema se denomina ASALBP-2.

Existen varias formulaciones matemáticas para el problema simple, en particular para SALBP-1, que han servido de referencia para muchos otros modelos. De acuerdo con Ghosh y Gagnon (1989), la primera formulación analítica de este problema fue realizada por Helgeson et al. en 1954 y publicada por primera vez en forma matemática por Salveson en 1955. Otros modelos incluyen el propuesto por Bowman (1960), el primero en contener variables enteras, modelo que fue mejorado por White (1961), y luego por Thangavelu y Shety (1971), el de estos últimos, a su vez, mejorado por Patterson y Albrancht (1975). El modelo que se presenta a continuación considera los parámetros, variables y restricciones que

se contemplan en los modelos matemáticos clásicos de SALBP, los cuales han sido adaptados para contemplar subgrafos de montaje alternativos.

## 2. Modelo del Problema de equilibrado de líneas con Subgrafos de Montaje Alternativos

Para facilitar el uso de la terminología, en la siguiente formulación, a cada alternativa de proceso se le denomina ruta de montaje, siendo cada ruta representada por un diagrama de precedencias. En el modelo, se considera que se tienen tantas rutas de montaje como posibles combinaciones de los subgrafos de montaje alternativos disponibles. Considérese nuevamente el ejemplo de la figura 1 que consiste de 4 tareas. En este caso, se dispone de dos subgrafos de precedencias alternativos, S1 y S2 (ver figura 2a), que representan las dos variantes del proceso de montaje. Las combinaciones posibles de dichos subgrafos resultan en dos rutas de montaje alternativas entre sí, como se muestra en la figura 2b.

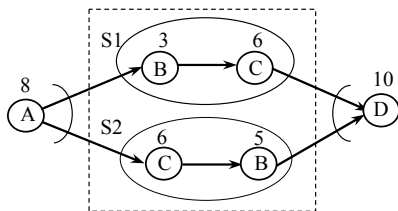


Figura 2a. Subgrafos de precedencias alternativos

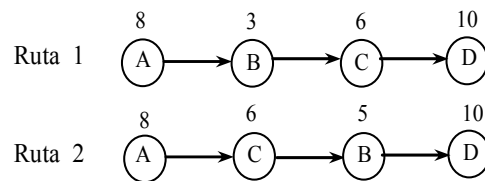


Figura 2b. Rutas de montaje alternativas

Considerando rutas de montaje alternativas, el problema ASALBP se puede definir de la siguiente manera: se tienen  $n$  tareas que deben ser asignadas a un conjunto de  $m$  estaciones, y se conocen  $r$  rutas de montaje posibles que especifican el orden (parcial) en el que se deben realizar las tareas. Se considera que los tiempos de proceso de las tareas no son fijos sino dependientes de la ruta de montaje seleccionada, de manera que se puede obtener un tiempo total de proceso de las tareas diferente para cada alternativa.

### 2.1. Notación

#### 2.1.1. Índices

$i$  para las tareas  
 $j$  para las estaciones  
 $r$  para las rutas

#### 2.1.2. Parámetros

$n$  número de tareas ( $i = 1, \dots, n$ ).  
 $m_{min}$  cota inferior del número de estaciones ( $j = 1, \dots, m_{max}$ ).  
 $m_{max}$  cota superior del número de estaciones ( $j = 1, \dots, m_{max}$ ).  
 $nr$  número de rutas alternativas ( $r = 1, \dots, nr$ ).  
 $C_{max}$  cota superior del tiempo ciclo.  
 $t_{ir}$  duración de la tarea  $i$  si se procesa a través de la ruta  $r$  ( $i = 1, \dots, n; r = 1, \dots, nr$ ); in algunos casos este valor es independiente de la ruta  $r$  ( $t_i$ ).

- $PD_{ir}$  conjunto de predecesores inmediatos de la tarea  $i$ , si se procesa a través de la ruta  $r$  ( $i = 1, \dots, n; r = 1, \dots, nr$ ).
- $E_{ir}, L_{ir}$  primera y última estación a la que se puede asignar la tarea  $i$  si ésta se procesa a través de la ruta  $r$  ( $i = 1, \dots, n; r = 1, \dots, nr$ ).
- $T_{jr}$  conjunto de tareas potencialmente asignables a la estación  $j$ ,  $\{i \mid j \in [E_{ir}, L_{ir}]\}$ , si éstas se procesan a través de la ruta  $r$  ( $j = 1, \dots, m_{\max}; r = 1, \dots, nr$ ).

### 2.1.3. Variables de decisión:

$x_{ijr} = 1$  si la tarea  $i$  se asigna a la estación  $j$  y ésta es procesada a través de la ruta  $r$  ( $\forall i, \forall r, \forall j \in [E_{ir}, L_{ir}]$ ).

$y_j = 1$  si alguna tarea es asignada a la estación  $j$  ( $j = m_{\min} + 1, \dots, m_{\max}$ ).

## 2.2. Modelo matemático del ASALBP-1

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{j=m_{\min}+1}^{m_{\max}} j \cdot y_j \quad (1)$$

$$\sum_{r=1}^{nr} \sum_{j=E_{ir}}^{L_{ir}} x_{ijr} = 1 \quad \forall i \quad (2)$$

$$\sum_{r=1}^{nr} \sum_{i \in T_{jr}} t_{ir} \cdot x_{ijr} \leq C_{\max} \quad j = 1, \dots, m_{\min} \quad (3)$$

$$\sum_{r=1}^{nr} \sum_{i \in T_{jr}} t_{ir} \cdot x_{ijr} \leq C_{\max} \cdot y_j \quad j = m_{\min} + 1, \dots, m_{\max} \quad (3')$$

$$\sum_{j=E_{kr}}^{L_{kr}} j \cdot x_{kjr} \leq \sum_{j=E_{ir}}^{L_{ir}} j \cdot x_{ijr} \quad \forall r, \forall i, \forall k \in PD_{ir} \quad (4)$$

$$\sum_{j=E_{1r}}^{L_{1r}} x_{1jr} \leq \sum_{j=E_{ir}}^{L_{ir}} x_{ijr} \quad \forall r; i = 2, \dots, n \quad (5)$$

$$x_{ijr} \in \{0, 1\} \quad \forall i, \forall r, \forall j \in [E_{ir}, L_{ir}] \quad (6)$$

$$y_j \in \{0, 1\} \quad j = m_{\min} + 1, \dots, m_{\max} \quad (7)$$

La función objetivo (1) consiste en minimizar el número de estaciones. Las restricciones (2) garantizan que cada tarea  $i$  es asignada a una única estación  $j$ , las restricciones (3) y (3') aseguran que el tiempo total de proceso asignado a la estación  $j$  no exceda el tiempo ciclo disponible, las restricciones (4) imponen las restricciones de precedencia entre las tareas, las restricciones de unicidad de ruta (5) aseguran que todas las tareas sean asignadas a una misma ruta. Finalmente, las restricciones (6) y (7) expresan la condición binaria de las variables de decisión.

## 2.3. Modelo matemático del ASALBP-2

El problema ASALBP-2 se formula de manera similar que el SALBP-1, en donde la variable que se desea minimizar es el tiempo ciclo  $tc$  (8); dado el número de estaciones de trabajo. De

esta forma, como las variables  $y_j$ , de existencia de las estaciones, son conocidas (todas son iguales a 1) no son necesarias en la formulación de las restricciones de este modelo.

$$\text{Minimizar } Z = tc \quad (8)$$

Con el modelo ASALBP-1 previamente presentado, se realizó un breve experimento computacional usando ILOG CPLEX 8.1, creando instancias de problemas de equilibrado de líneas que contemplasen rutas de montaje alternativas. Dicho experimento mostró que problemas de tamaño pequeño se pueden resolver de manera óptima en tiempo de cómputo razonable.

### 3. Conclusiones

En este trabajo se presentó un modelo de programación matemática que ha sido desarrollado para resolver el problema ASALBP, el cual decide simultáneamente sobre el subgrafo de montaje (la ruta) y el equilibrado de la línea (la asignación de las tareas a las estaciones). Cada alternativa de montaje considerada en el modelo se obtiene combinando todos los subgrafos de montaje que estén disponibles. Se mostró a través de un ejemplo numérico como un problema se puede sub-optimizar si no se toman en cuenta las repercusiones que tienen en el equilibrado de la línea los subgrafos de montaje alternativos; por lo que a priori una solución puede ser descartada por tener, por ejemplo, un mayor tiempo total de proceso. Por otra parte, se desarrolló una breve experiencia computacional, cuyos resultados mostraron que problemas pequeños pueden ser resueltos de forma óptima en tiempos de cómputo razonable.

### Referencias

- Bowman, E.H. (1960). Assembly line balancing by linear programming, *Operations Research*, 8 (3), 385-389.
- Capacho, L. y Pastor, R. (2005). ASALBP: the Alternative Subgraphs Assembly Line Balancing Problem. *Technical Report IOC-DT-P-2005-5*. UPC. Barcelona, Spain.
- Patterson, J.H. and Albracht, J.J. (1975). Assembly line balancing: 0-1. Programming with Fibonacci Search. *Operations Research*, 23, 166-174.
- Thangavelu, S.R., and Shety, C.M. (1971). Assembly line balancing by zero-one integer programming. *AIEE Transactions*, vol. 3, pp. 61-68.
- White, W. (1961). Comments on a paper by Bowman. *Operations Research*, Vol. 9, 274-276.