IX Congreso de Ingeniería de Organización
Gijón, 8 y 9 de septiembre de 2005

Modelos matemáticos de difusión tecnológica

José Ignacio López Sánchez[1], José Luis Arroyo Barrigüete[1]

[1] Dpto. de Organización de Empresas. Universidad Complutense de Madrid. Campus de Somosaguas, 28223 Madrid. jilopez@ccee.ucm.es, jlarroyo@ccee.ucm.es

Resumen

El objetivo de esta ponencia es revisar los diferentes modelos de difusión tecnológica recogidos en la literatura. El trabajo no se ceñirá a propuestas desarrolladas en el ámbito de la Economía, sino que se estudiarán también otros modelos surgidos en distintas áreas de conocimiento (p.e. la Biología Teórica), pero que presentan unas propiedades matemáticas adecuadas para modelizar la difusión tecnológica. La ponencia se cerrará con la propuesta de un método de clasificación y unificación de modelos.

Palabras clave: difusión, tecnología, sistemas dinámicos.

1. Introducción

La difusión de innovaciones, que puede definirse como la diseminación de una nueva idea desde su fuente de creación hasta los usuarios finales (Rogers, 1962), es sin duda uno de los elementos característicos de la sociedad actual (Schrage, 2004), de modo que si bien se trata de un tema que lleva siendo estudiado desde hace tiempo sigue estando en plena vigencia.

Los modelos matemáticos desarrollados para modelizar el proceso de difusión tecnológica son cada vez más elaborados y complejos, pero dentro del grupo de los modelos continuos (basados en ecuaciones diferenciales) es posible distinguir dos grandes bloques. Los primeros consideran no sólo la difusión temporal sino también la espacial, es decir, incluyen en sus ecuaciones términos que expresan cómo se difunde la tecnología en el tiempo y en el espacio. El segundo tipo de modelos constituye un caso particular en el que se considera únicamente la dimensión temporal, y éste será el tipo de modelos en el que se centrará la presente ponencia. Adicionalmente, y dadas las limitaciones de espacio, nos ceñiremos a aquellos que presentan una evolución temporal de tipo sigmoidal, ya que son los empleados con mayor frecuencia.

2. Estructura general de los modelos de difusión

La estructura general de los modelos de difusión es la propuesta por Mahajan y Peterson (1978) y Mahajan y Muller (1979), que identifica tres segmentos de mercado diferentes:

- Mercado sin explotar: $S_1(t) = P(t) - \tilde{N}(t)$, siendo $P(t)$ el número total de individuos en el mercado. Representa por tanto un conjunto de individuos que por diversas razones no puede ser considerados como mercado potencial.
- Mercado potencial: $S_2(t) = \tilde{N}(t) - N(t)$, siendo $\tilde{N}(t)$ el mercado potencial total.
- Mercado Actual: $N(t)$ el número de usuarios que ya han adoptado la tecnología.

El número de individuos en uno u otro segmento variará a lo largo del tiempo, pero en cualquier instante t se verifica que $S_1(t) + S_2(t) + N(t) = P(t)$. Llamando $\tilde{n}(t)$ al número de individuos que pasan del mercado sin explotar al mercado potencial en el instante t, $n(t)$ al número de individuos que pasan del mercado potencial a adquirir la tecnología y $p(t)$ al incremento del mercado total tenemos que:

$$S_1(t+1) = S_1(t) + p(t) - \tilde{n}(t) \quad (1)$$
$$S_2(t+1) = S_2(t) + \tilde{n}(t) - n(t) \quad (2)$$
$$N(t+1) = N(t) + n(t) \quad (3)$$

Como ya se ha indicado, centraremos nuestra atención en los modelos de tipo continuo, sin efectos espaciales y con evolución sigmoidal. La mayoría de los modelos que recoge la literatura son además autónomos, por lo que el teorema de Poincaré-Bendixon (ver por ejemplo Strogatz, 1994: 203) garantiza la no existencia de caos (atractores extraños). Sin embargo, algunas propuestas incorporan retardos y términos de tipo integrodiferencial, lo que hace que el teorema de Poincaré-Bendixon no sea aplicable y por tanto no existan garantías del comportamiento regular del modelo. Esto supone una dificultad añadida a la hora de estudiar sus propiedades, aunque habitualmente la estimación de los parámetros con datos reales sitúe al sistema fuera de una región caótica.

3. Algunos modelos de difusión tecnológica

A fin de comprender la formulación de los modelos de difusión, se analizarán brevemente los sistemas dinámicos correspondientes al modelo Gompetz y logístico, que son los más conocidos y empleados (Raeside, 1988), y el modelo de Nicholson, prácticamente desconocido en la literatura económica, pero que presenta algunas propiedades interesantes.

3.1 El modelo Gompertz

En 1825, Gompertz introdujo una familia de funciones capaces de representar el crecimiento demográfico en una determinada región, sustentado en la hipótesis de que se produce un crecimiento exponencial del número de muertes entre la madurez sexual y la vejez (Olshansky y Carnes, 1997). Distintas investigaciones han demostrado la utilidad de este modelo para la representación de procesos de difusión tecnológica, como por ejemplo los trabajos de Franses (1994) y Morrison (1996).

La velocidad de difusión del modelo Gompertz, así como la resolución analítica de dicha ecuación diferencial, que expresa la evolución temporal de la cuota de mercado en tanto por uno, se muestran en (4). $X(t)$ representa la cuota de mercado en tanto por uno de la tecnología, β el parámetro de crecimiento, y k la constante de integración. Se trata de una curva asimétrica, como puede calcularse fácilmente, de modo que su punto de inflexión se sitúa en $x(t)=1/e$, siendo e aproximadamente 2.718.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \beta \cdot x(t) \cdot Ln\frac{1}{x(t)} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \exp[-\exp(-\beta \cdot t + k)] \quad (4)$$

3.2 El modelo Logístico

El modelo logístico (y sus numerosas variantes) es probablemente el más empleado para la modelización de procesos de difusión. Fue formulado inicialmente por Verhulst en 1838 (ver

Meade e Islam, 1998), aunque también es conocido como modelo de Pearl, y ha sido aplicado con éxito en múltiples investigaciones sobre la difusión, como los de Griliches (1957 y 1960), Mansfield (1961), Taner (1978), Teece (1980), Randles (1983) o Polo (1987). Su formulación parte de un planteamiento relativamente sencillo: la velocidad de difusión de una tecnología es proporcional al número de adoptantes en el instante considerado y al número de potenciales adoptantes que aun no lo han hecho. De este modo la velocidad de adopción de la tecnología y el crecimiento de la cuota de mercado se muestran en (5). La logística es una curva simétrica, de modo que su punto de inflexión se sitúa en $x(t)=1/2$.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \beta \cdot x(t) \cdot \left(1 - x(t)\right) \quad \Rightarrow \quad x(t) = 1/\left[1 + \exp(-\beta \cdot (t - t_0))\right] \tag{5}$$

3.3 El modelo de Nicholson

Realmente se trata de un modelo surgido en el ámbito de la biología teórica para explicar la evolución de poblaciones de la *Lucila Cuprina*, un tipo de moscardo (ver por ejemplo Ruan, 2004 o Brauer y Castillo-Chávez, 2001: 119). La formulación del modelo es la siguiente:

$$\frac{dx(t)}{dt} = P \cdot x(t-\tau) \cdot \exp\left[-\frac{x(t-\tau)}{x_0}\right] - \delta \cdot x(t) \tag{6}$$

Donde P, δ, x_0, y τ son cuatro parámetros que caracterizan el proceso de evolución. La figura 1 muestra el comportamiento de esta ecuación para distintos valores de dichos parámetros. Como puede observarse, si bien es capaz de representar un proceso de difusión tecnológica de tipo sigmoidal, también puede presentar un comportamiento caótico. Esto se debe a que, tal y como se comentó en el apartado 2, al incorporar retardos pueden aparecer atractores extraños.

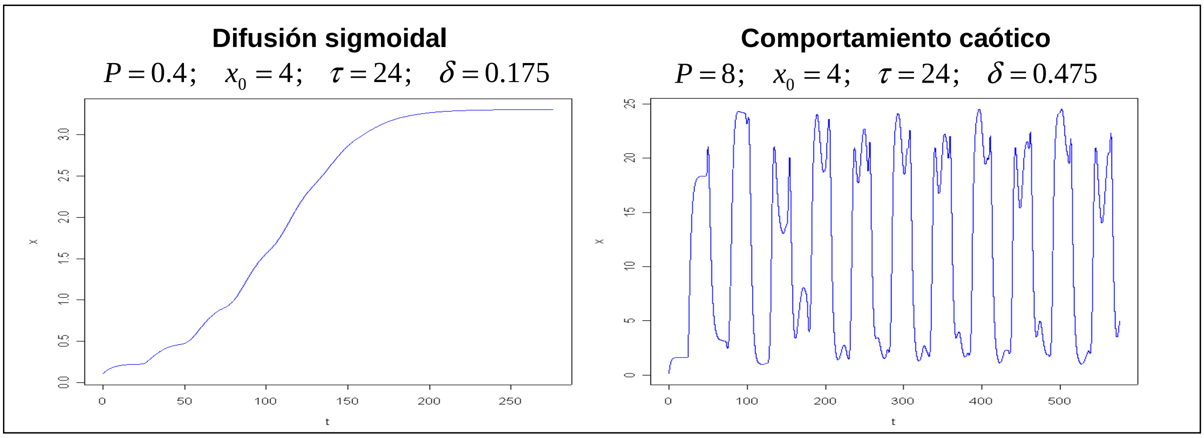

Figura 1. Dos comportamientos del modelo de Nicholson (Fuente: elaboración propia. Algoritmo de Runge-Kutta de orden 4 programado en "R")

4. Clasificación y unificación de modelos

4.1. Resumen de los modelos de difusión más relevantes

En las tablas 1 y 2 se muestra una selección de 37 modelos de difusión (expresados en cuota de mercado en tanto por uno) que presentan una evolución sigmoidal para determinados valores de sus parámetros. Como puede comprobarse existe una cantidad considerable de propuestas, y de hecho además de los que se muestran en las tablas, la literatura recoge múltiples modelos alternativos: el modelo de Bass con coeficientes de influencia crecientes o decrecientes en vez de constantes (Mahajan *et al.*, 1990), Bass con número de adoptantes variable (Mahajan y Peterson, 1978), Bass con competencia entre diferentes generaciones de productos (Norton y Bass, 1987), el modelo extendido de Riccati (Levenbach y Reuter, 1976), las variantes II y III del modelo de Kumar y Kumar (Kumar y Kumar, 1992), la variante del NUI propuesta por Molyneux y Shamroukh (1996), los modelos de Chu (2000), surgidos en el ámbito de la Ingeniería Química, el modelo de crecimiento poblacional de Puu (2003: 204-209), el modelo de Goudriaan y sus variantes (Yin *et al.*, 2003) y un largo etcétera.

Tabla 1. Resumen de los principales modelos de difusión I (Fuente: elaboración propia)

MODELO	ECUACIÓN	REFERENCIAS
Gompertz	$\frac{dx(t)}{dt}=\beta\cdot x(t)\cdot Ln\frac{1}{x(t)}$ $\quad x(t)=\exp[-\exp(-\beta\cdot t+k)]$	Franses (1994), Morrison (1996)
Gompertz. Variante de Chow	$\frac{dx(t)}{dt}=\beta(t)\cdot x(t)\cdot Ln\frac{1}{x(t)}$ $\quad x(t)=\exp\left[-\exp\left(-\int\beta(z)\cdot dz\right)\right]$	Chow (1967)
Gompertz. Variante de 3 parámetros	$x(t)=a\cdot b^{-q^t}$	Weisstein (1999: 748)
Gompertz. Variante de Lee *et al.*	$x(t)=\exp\left[-\exp\left[-\left((\alpha+\beta\cdot t)^{1/\lambda}+\gamma\right)\right]\right]$	Lee *et al.* (1992)
Gaussiano	$\frac{dx(t)}{dt}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\cdot\exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$	Rogers (1962)
Log-Normal	$\frac{dx(t)}{dt}=\frac{1}{t\cdot\sqrt{2\pi\sigma^2}}\cdot\exp\left[-\frac{(Ln(t)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$	Bain (1963)
Weibull	$\frac{dx(t)}{dt}=\frac{\beta}{\alpha}\cdot\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1}\exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}\right]$ $\quad x(t)=1-\exp\left[-(t/\alpha)^{\beta}\right]$	Sharif e Islam (1980)
Weibull con tres parámetros	$x(t)=1-\exp\left[-((t-\tau)/\alpha)^{\beta}\right]$	Murthy *et al*. (2004: 9)
Log-Recíproco	$\frac{dx(t)}{dt}=\frac{1}{b\cdot t^2}\exp\left[-\frac{1}{b\cdot t}\right]$ $\quad x(t)=\exp[-1/(b\cdot t)]$	McCarthy y Ryan (1976)
Gamma	$\frac{dx(t)}{dt}=\frac{a^p}{\Gamma(p)}\cdot x(t)^{p-1}\cdot e^{-a\cdot x(t)}$	Fernández-Abascal et al. (1994: 448 – 452)
Beta	$\frac{dx(t)}{dt}=\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}\cdot x(t)^{p-1}\cdot(1-x(t))^{q-1}$	Fernández-Abascal *et al.* (1994: 455-458)
Singh y Maddala	$\frac{dx(t)}{dt}=\frac{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot t^{a_2-1}}{\left(1+a_1\cdot t^{a_2}\right)^{a_3+1}}$ $\quad x(t)=1-1/\left(1+a_1\cdot t^{a_2}\right)^{a_3}$	Singh y Maddala (1976)
Adaptativo Polinómico	$\frac{dx(t)}{dt}=P_0+2\cdot a_2\cdot t+3\cdot a_3\cdot t^2+4\cdot a_4\cdot t^3$	Martín-Carrillo (2000: 170-189)
Logístico	$\frac{dx(t)}{dt}=\beta\cdot x(t)\cdot(1-x(t))$ $\quad x(t)=1/[1+\exp(-\beta\cdot(t-t_0))]$	Griliches (1957 y 1960), Mansfield (1961)
Logístico. Variante de Chow	$\frac{dx(t)}{dt}=\beta(t)\cdot x(t)\cdot(1-x(t))$ $\quad x(t)=1/\left[1+\exp\left(-\int\beta(z)\cdot dz\right)\right]$	Hernes (1976)
Paloheimo y Dickie	$\frac{dx(t)}{dt}=H\cdot x(t)^d-k\cdot x(t)^n$	Paloheimo y Dickie (1965)
Bass	$\frac{dx(t)}{dt}=(p+q\cdot x(t))\cdot(1-x(t))$ $\quad x(t)=\frac{1-\exp(-(p+q)\cdot t)}{1+(q/p)\cdot\exp(-(p+q)\cdot t)}$	Bass (1969)
Bass. Variante para $x(0)\neq 0$	$x(t)=[1-c\cdot(p/q)\cdot\exp(-(p+q)\cdot t)]/[1+c\cdot\exp(-(p+q)\cdot t)]$	Meade e Islam (1998)
Bass. Variante con efecto aprendizaje	$\frac{dx(t)}{dt}=(p+q\cdot x(t)+c\cdot k\cdot y(t))\cdot(1-x(t))$	Ganesh *et al.* (1997)
Bass con deserciones	$\frac{dx(t)}{dt}=(\lambda_e+\lambda_i\cdot x(t))\cdot(1-x(t))-\mu\cdot x(t)$	Bidges *et al.* (1993)
Bass en tres etapas	$\frac{dz(t)}{dt}=(p+q_1\cdot A(t)+q_2\cdot x(t))\cdot(1-A(t)-x(t))$	Jain *et al.* (1991)

Tabla 2. Resumen de los principales modelos de difusión II (Fuente: elaboración propia)

MODELO	ECUACIÓN	REFERENCIAS
Bass con efectos publicitarios (innovación e imitación)	$\frac{dx(t)}{dt}=\left(p+q\cdot x(t)+\alpha\cdot f(A)\right)\cdot\left(1-x(t)\right)$ $\frac{dx(t)}{dt}=\left(p+q\cdot x(t)+\beta\cdot f(A)\cdot x(t)\right)\cdot\left(1-x(t)\right)$	Simon y Sebastian (1987)
Floyd	$\frac{dx(t)}{dt}=b\cdot x(t)\cdot\left(1-x(t)\right)^2$	Floyd (1968)
Sharif y Kabir	$\frac{dx(t)}{dt}=\frac{b\cdot x(t)\cdot\left(1-x(t)\right)^2}{1-x(t)\cdot(1-\sigma)}$	Sharif y Kabir (1976)
Stanford	$\frac{dx(t)}{dt}=\frac{q}{t}\cdot x(t)\cdot\left(1-x(t)\right)$	Teotia y Raju (1986)
Jeuland	$\frac{dx(t)}{dt}=\left(p+q\cdot x(t)\right)\cdot\left(1-x(t)\right)^{1+\gamma}$	Jeuland (1981)
FLOG	$\frac{dx(t)}{dt}=\phi\cdot f'\left(\mu,k,t\right)\cdot x(t)\cdot\left(1-x(t)\right)$	Bewley y Fiebig, (1988)
NUI	$\frac{dx(t)}{dt}=\left(p+q\cdot x(t)^{\delta}\right)\cdot\left(1-x(t)\right)$	Easinwood *et al.* (1983)
NHNV	$\frac{dx(t)}{dt}=\left(p+q\cdot\left(x(t)+h\cdot x(t-1)+...\right)^{\delta}\right)\cdot\left(1-x(t)\right)$	Sharma y Bhargava (1994)
NSRL	$\frac{dx(t)}{dt}=q\cdot x(t)^{\delta}\cdot\left(1-x(t)\right)$	Easinwood *et al.* (1981)
Bertalanffy	$\frac{dx(t)}{dt}=\frac{b}{\alpha}\cdot x(t)\cdot\left(1-x(t)^{\alpha}\right)$	Bertalanffy (1957)
Birch	$\frac{dx(t)}{dt}=\frac{\beta\cdot x(t)\cdot\left(1-x(t)\right)}{1-x(t)+c\cdot x(t)}$	Birch (1999)
Michaelis-Mentel Generalizado	$\frac{dx(t)}{dt}=\frac{c\cdot t^{c-1}}{k^c+t^c}\cdot\left(1-x(t)\right)$	López *et al.* (2000)
KKI	$\left(\frac{q-p\cdot b}{q}\right)Ln\left(p+q\cdot x(t)\right)-(b+1)Ln\left(1-x(t)\right)=a+\left(q+p\right)\cdot t$	Kumar y Kumar (1992)
Harvey	$Ln\left(x(t)-x(t-1)\right)=Ln\left(\frac{b\cdot c}{\alpha}\right)-b\cdot t+Ln(1+\alpha)\cdot Ln\left(x(t-1)\right)$	Harvey (1984)
Nicholson	$\frac{dx(t)}{dt}=P\cdot x(t-\tau)\cdot\exp\left[-\frac{x(t-\tau)}{x_0}\right]-\delta\cdot x(t)$	Ruan (2004).
De Cesare y Di Liddo	$\frac{\partial u(z,t)}{\partial t}=q\left(p(t)\right)\cdot\left(\int_{\Omega}K(z,s)\cdot u(s,t)\cdot ds+\gamma(t)\right)\cdot\left(1-u(z,t)\right)$ $I(z,t)=\int_{\Omega}K(z,s)\cdot u(s,t)\cdot ds$	De Cesare y Di Liddo (2000)

4.2. Un posible método de clasificación y unificación de modelos

Resulta complicado establecer un método de clasificación de modelos, de modo que en el presente trabajo se ha optado por un criterio propio basado en el número de parámetros del modelo. Este criterio presenta dos ventajas fundamentales: permite establecer una jerarquía en cuanto a la dificultad de ajuste con datos reales (lógicamente a mayor número de parámetros, mayor dificultad de ajuste y mayor necesidad de datos para que la estimación tenga validez estadística) y permite recoger de una forma sencilla las relaciones existentes entre los distintos modelos, unificando algunos de ellos en una única ecuación. Para establecer esta clasificación se ha seguido un proceso de dos etapas:

1. En primer lugar se han estructurado en dos figuras (2 y 3) los modelos más relevantes, estableciendo una jerarquía en función del número de parámetros que aparecen en la ecuación diferencial (que siempre será uno menos de los que finalmente deban calcularse, debido a la constante de integración), e indicando las relaciones que existen entre ellos.

2. En las figuras 4 y 5 se proponen una serie de modelos propios que unifican a los anteriores, y que se han dibujado en un color diferente a fin de distinguirlos de los modelos originales. En este sentido es preciso indicar que sería posible la unificación completa de todos los modelos mediante una ecuación con el suficiente número de parámetros, ya que bastaría con ir añadiendo factores multiplicativos elevados a un exponente hasta recoger todas las posibles variantes, aunque obviamente una ecuación de este tipo carece de sentido desde el punto de vista práctico. Sin recurrir a este extremo es posible lograr una unificación de muchos de los modelos, de modo que con un número suficientemente pequeño de parámetros es posible formular una ecuación que recoja como casos particulares un gran número de ellos. Por ejemplo, el modelo 1 (figura 4) con tan sólo 4 parámetros (mas la constante de integración) es capaz de unificar 6 ecuaciones: NUI, Jeuland, Bass, Floyd, NSRL y logística.

En resumen, las similitudes que existen entre algunos de los modelos estudiados permite formular una serie de modelos generales que sintetizan varios de ellos, aunque no es posible lograr una unificación completa sin recurrir a una ecuación con elevado número de parámetros que, por tanto, no tiene ningún interés desde el punto de vista práctico.

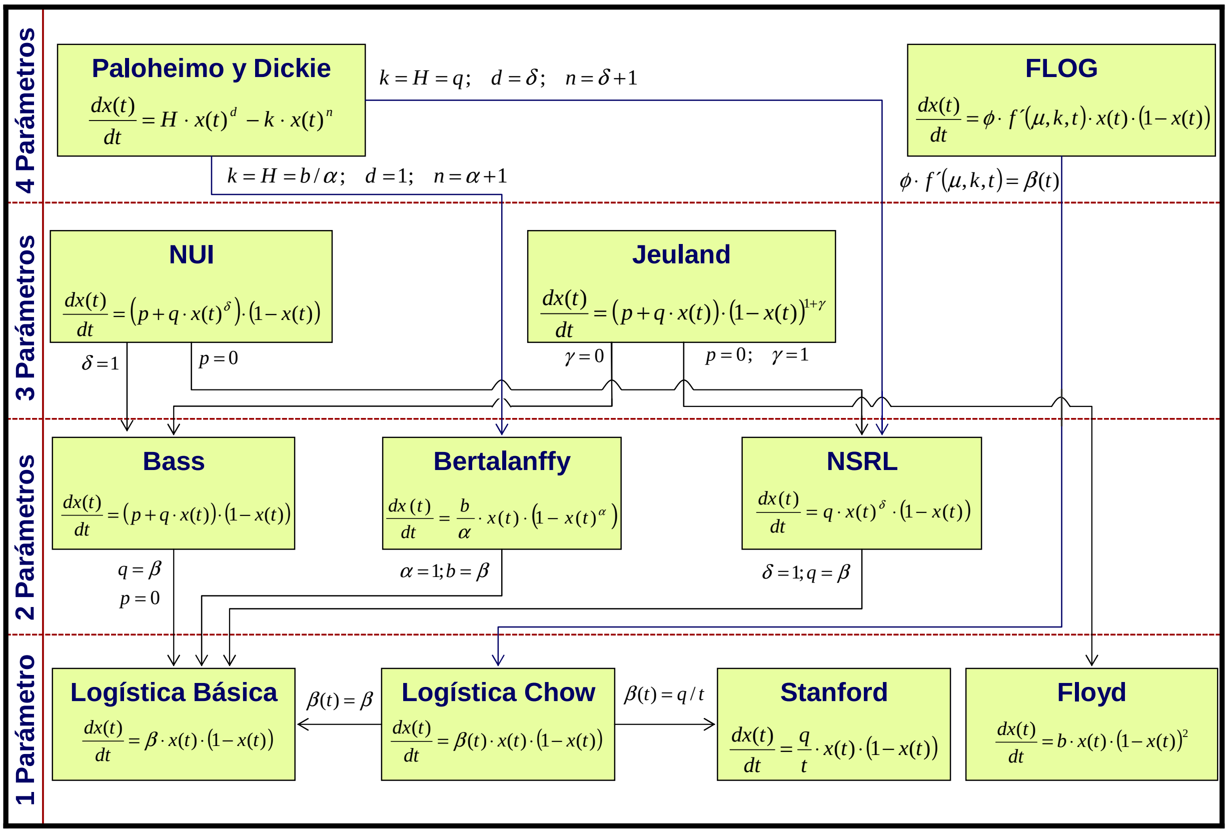

Figura 2. Clasificación y relación de algunos modelos de difusión I (Fuente: elaboración propia)

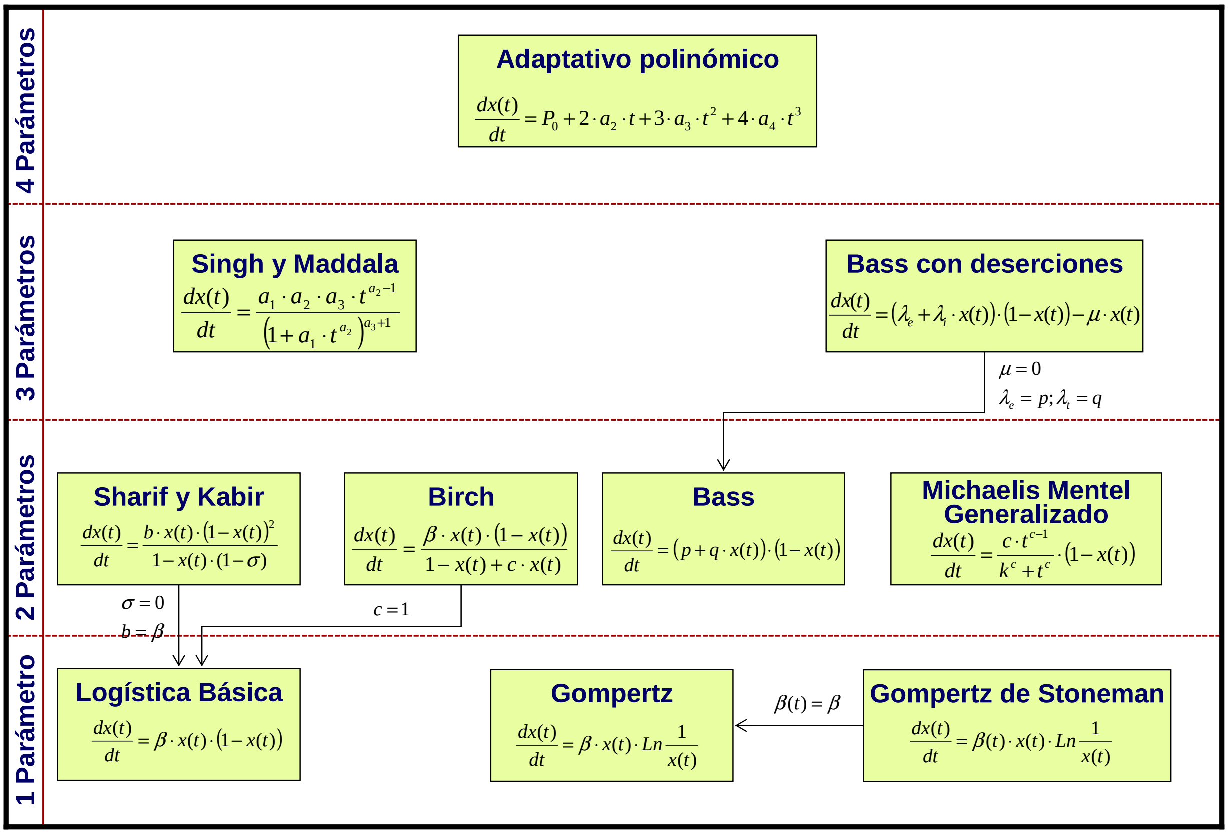

Figura 3. Clasificación y relación de algunos modelos de difusión II (Fuente: elaboración propia)

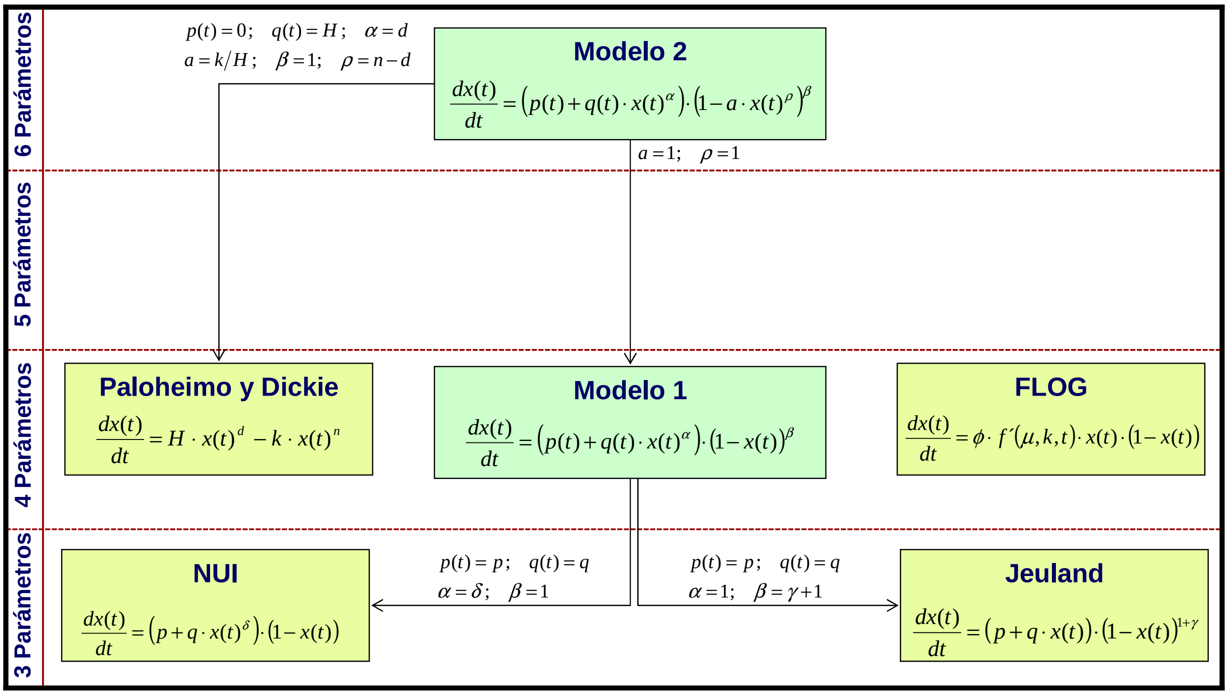

Figura 4. Unificación de algunos modelos de difusión I (Fuente: elaboración propia)

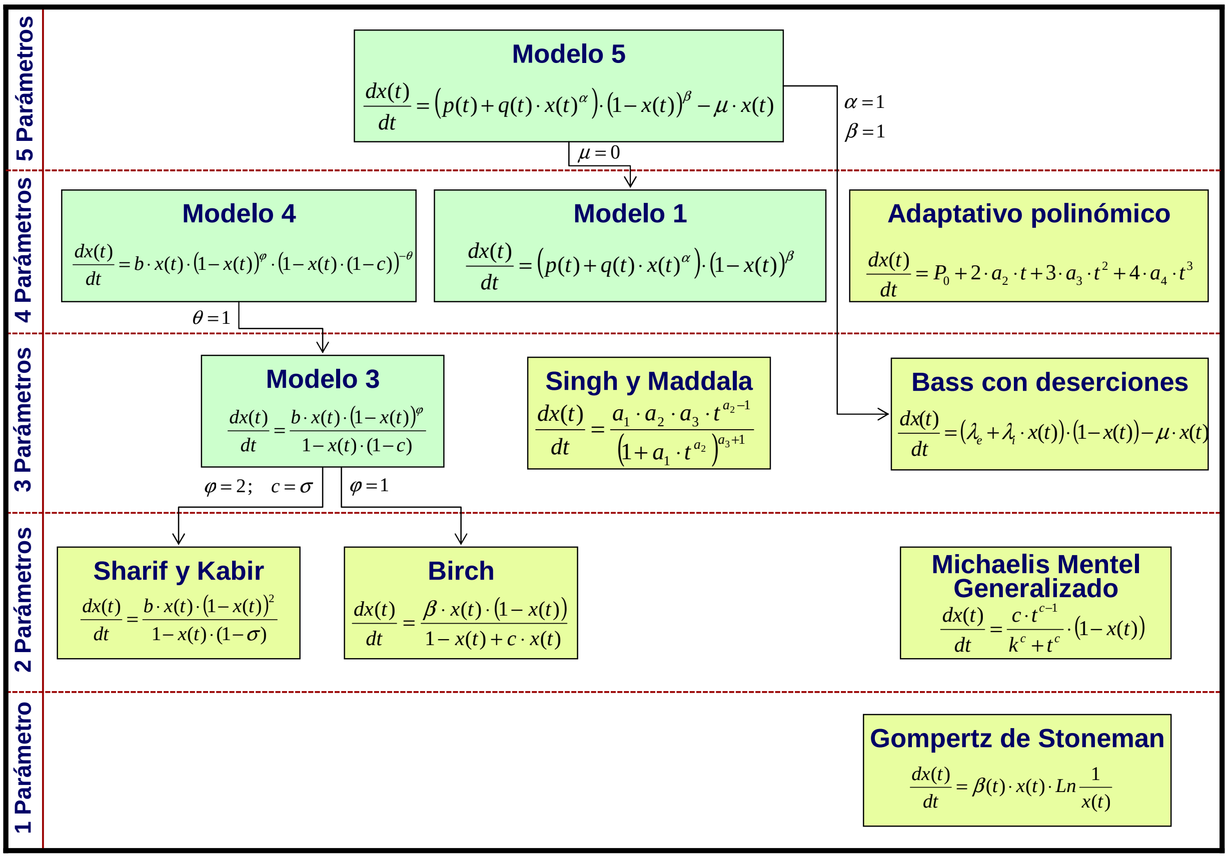

Figura 5. Unificación de algunos modelos de difusión II (Fuente: elaboración propia)

5. Conclusiones

A lo largo de este trabajo se han esbozado brevemente las características generales de los modelos de difusión sigmoidal, poniendo de manifiesto las peculiaridades que presentan los sistemas con retardos y de tipo integrodiferencial. Así mismo se ha realizado una extensa revisión bibliográfica que puede servir de base para posteriores investigaciones, ya que además de las propuestas recogidas en la literatura económica, incluye otra serie de modelos extraídos de diferentes disciplinas académicas. Por otra parte se ha planteado un método de clasificación y unificación de modelos, que resulta relevante en tanto que permite establecer cierto orden entre las numerosas propuestas identificadas.

La principal limitación de este trabajo es que, debido a las restricciones de espacio, no ha sido posible estudiar los modelos discretos, por lo que en futuras investigaciones sería interesante realizar un estudio equivalente para dicho tipo de modelos.

Agradecimientos

Los autores agradecen a la Fundación Rafael del Pino la financiación de este trabajo.

Referencias

Bain, A.D. (1963). Demand for New Commodities. *Journal of the Royal Statistical Society Series A*, Vol. 126, pp. 285-299.

Bass, F.M. (1969). A New Product Growth Model for Consumer Durables. *Management Science*, Vol. 15, No. 5, pp. 215-227.
Bertalanffy, L. (1957). Quantitative Laws in Metabolism and Growth. *Quarterly Review in Biology*, Vol. 32, pp. 217-231.
Bewley, R.; Fiebig, D. (1988). Flexible Logistic Growth Model with Applications in Telecommunications. *International Journal of Forecasting*, Vol. 4, No. 2, pp. 177-192.
Birch, C.O.D. (1999). A New Generalized Logistic Sigmoid Growth Equation Compared with the Richards Growth Equation, *Annals of Botany*, Vol. 83, No. 6, pp. 713-723.
Brauer, F.; Castillo-Chávez, C. (2001). *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Springer-Verlag.
Bridges, E.; Ensor, K.B., Norton, J.A. (1993). Forecasting the Number of Competing Products in High-Technology Markets. *International Journal of Forecasting*, Vol. 9, No.3,pp. 399-405.
Chow, G.C. (1967). Technological Change and the Demand for Computers. *American Economic Review*, Vol. 57, No. 5, pp.1.117-1.130.
Chu, K.H. (2000). New Models for Metal Biosorption in Fixed Bed Columns. 9º APCCHE Congress.
De Cesare, L.; Di Liddo, A. (2000). A Bolza Optimal Control Problem for Innovation Diffusion. *Dynamic Systems and Applications*, Vol. 9, pp. 269-280.
Easingwood, C.; Mahajan, V.; Muller, E. (1983). A Nonuniform Influence Innovation Diffusion Model of New Product Acceptance. *Marketing Science*, Vol. 2, No. 3, pp. 273-296.
Easingwood, C.; Mahajan, V.; Muller, E. (1981). A Non Symmetric Responding Logistic Model for Forecasting Technological Substitution. *Technological Forecasting and Social Change*, Vol. 20, pp. 199-213.
Fernández-Abascal, H.; Guijarro, M.M.; Rojo, J.L.; Sanz, J.A. (1994). *Cálculo de Probabilidades y Estadística*. Editorial Ariel, S. A.
Floyd, A. (1968). *Trend Forecasting. A Methodology for Figures of Merit*. En Bright, J. (Ed.). *Technological Forecasting for Industry and Government: Methods and Applications*. Prentice-Hall.
Franses, P.H. (1994). Finding a Gompertz Curve. *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 45, No.1, pp. 109-113.
Ganesh, J.; Kumar, V., Subramaniam, V. (1997). Learning Effect in Multinational Diffusion of Consumer Durables: An Exploratory Investigation. *Journal of the Academy of Marketing Science*, Vol. 25, No. 3. pp. 214-228.
Griliches, Z. (1960). Hybrid Corn and the Economics of Innovation. *Science*, Vol. 132, pp. 275-280.
Griliches, Z. (1957). Hybrid Corn: An Exploration in the Economics of Technological Change. *Econometrica*, Vol. 25, pp. 501-522.
Harvey, A.C. (1984). Time Series Forecasting Based on the Logistic Curve. *Journal of Operational Research Society*, Vol. 35, pp. 641-646.
Hernes, G. (1976). Diffusion and Growth. The Non Homogeneous Case. *Scandinavian Journal of Economics*, Vol. 78, No. 3, pp. 427-436.
Jain, D.; Mahajan, V.; Muller, E. (1991). Innovation Diffusion in the Presence of Supply Restrictions. *Marketing Science*, Vol. 10, No. 1, pp.83-90.
Jeuland, A. P. (1981). Parsimonious Models of Diffusion of Innovations. Part A, Derivations and Comparisons. Working Paper, Graduate School of Business, University of Chicago.
Kumar, U.; Kumar, V. (1992). Technological Innovation Diffusion: The Proliferation of Substitution Models and Easing the User's Dilemma. *IEEE Transactions on Engineering Management*, Vol. 39, No. 2, pp. 158-168.
Lee, J.C.; Lu, K.W.; Horng, S.C. (1992). Technological Forecasting with Nolinear Models. *Journal of Forecasting*, Vol. 11, No. 3, pp. 195-206

Levenbach, H.; Reuter, B.E. (1976). Forecasting Trending Time Series with Relative Growth Rate Models. *Technometrics*, Vol. 18, pp. 261-272.
López, S.; France, J.; Gerrits, W.J.J.; Dhanoa, M.S.; Humpries, D.J.; Dijkstra, J. (2000). A Generalized Michaelis-Mentel Equation for the Analysis of Growth. *Journal of Animal Science*, Vol. 78, N0. 7. pp. 1.816-1.828.
Mahajan, V.; Muller, E.; Bass, F.M. (1990). New Product Diffusion Models in Marketing: A Review and Directions for Research. *Journal of Marketing*, Vol. 54, No. 1, pp. 1-26.
Mahajan, V.; Muller, E. (1979). Innovation Diffusion and New Product Growth Models in Marketing. *Journal of Marketing*, Vol. 43, No. 4, pp. 55-68.
Mahajan, V.; Peterson, R.A. (1978). Innovation Diffusion in a Dynamic Potential Adopter Population. *Management Science*, Vol. 24, No. 15, pp. 1.589 – 1.597.
Mansfield, E. (1961). Technical Change and the Rate of Imitation. *Econometrica*, Vol. 29, No. 4, pp. 741-767.
Martín-Carrillo Dominguez, A. (2000). Desarrollo de un Modelo Flexible de Difusión de Innovaciones: Aplicación a los Casos de Nuevas Tecnologías Aeroespaciales y de Internet. *Tesis Doctoral no publicada*. Facultad de CC. EE., U. Complutense de Madrid.
McCarthy, C.; Ryan, C.J. (1976). An Econometric Model of Television Ownership. *Economic and Social Review*, Vol. 7, pp. 256-177.
Meade, N.; Islam, T. (1998). Technological Forecasting. Model selection, Model Stability, and Combining Models. *Management Science*, Vol. 44, No. 8, pp. 1.115-1.130.
Molyneux, P.; Shamroukh, N. (1996). Diffusion of Financial Innovations: The Case of Junk Bonds and Note Issuance Facilities. *Journal of Money, Credit, and Banking*, Vol. 28, No. 3, pp. 502-522.
Morrison, J. (1996). How to use diffusion models in new product forecasting. *The Journal of Business Forecasting Methods & Systems*, Vol.15, No. 2, pp. 6-9.
Murthy, D.N.P.; Xie, M.; Jiang, R. (2004). *Weibull Models*. John Wiley & Sons, Inc.
Norton, J.A.; Bass, F.M. (1987). A Diffusion Theory Model of Adoption and Substitution for Successive Generations of High-Technology Products. *Management Science*, Vol. 33, No. 9. pp. 1.069 – 1.086.
Olshansky, S.J.; Carnes, B.A. (1997). Ever Since Gompertz. *Demography*, Vol. 34, No.1, pp. 1-15.
Paloheimo, J.E.; Dickie, L.M. (1965). Food and Growth of Fishes. 1. A Growth Curve Derived from Experimental data. *J. Fish. Res. Board Can*, Vol 22, pp. 521-542.
Polo, Y. (1987). Determinantes Empresariales de la Adopción de Innovaciones: Terminales de Teleproceso en el Sector Bancario Español. *Investigaciones Económicas*, Vol. XI, No. 2, pp. 243 – 260.
Puu, T. (2003). *Attractors, Bifurcations & Chaos. Nonlinear Phenomena in Economics*. Second Edition. Springer-Verlag.
Randles, F. (1983). On the Diffusion of Computer Terminals in an Established Engineering Environment. *Management Science*, Vol. 29, No. 4, pp. 465-476.
Raeside, R. (1988). The Use of Sigmoids in Modelling and Forecasting Human Populations. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, Vol. 151, No. 3, pp. 499-513.
Rogers, E. M. (1962). *Diffusion of Innovations*. The Free Press.
Ruan, S. (2004). *Delay Differential Equations in Single Species Dynamics*. En Dads, E.A.; Arino, O.; Hbid, M. *Delay Differential Equations with Applications*. NATO Advanced Study Institute. (Disponible en www.math.miami.edu/~ruan/publication.html)
Schrage, M. (2004). Innovation Diffusion. *Technology Review*, Vol. 107, No. 10, pp. 18.
Sharif, N.M.; Islam, N.M. (1980). The Weibull Distribution as a General Model for Forecasting Technological Change. *Technological Forecasting and Social Change*, Vol. 18, pp. 247-256.

Sharif, N.M.; Kabir, C. (1976). A generalized Model for Forecasting Technological Substitution. *Technological Forecasting and Social Change*, Vol. 8, pp. 353-364.
Sharma, P.; Bhargava, S.C. (1994). A Non-Homogeneous Non-Uniform Influence Model of Innovation Diffusion. *Technological Forecasting and Social Change*, Vol. 46, pp. 279-288.
Simon, H.; Sebastian, K. (1987). Diffusion and Advertising: The German Telephone Campaign. *Management Science*, Vol. 33, No. 4, pp. 451-466.
Singh, S.K.; Maddala, G.S. (1976). A Function for Size Distribution of Incomes. *Econometrica*, Vol. 44, No. 5, pp. 963-970.
Strogatz, S.H. (1994). *Nonlinear Dynamics and Chaos. With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. Perseus Books Publishing, L. L. C.
Taner, J.C. (1978). Long-Term Forecasting of vehicle Ownership and Road Traffic. *Journal of the Royal Statistical Society. Serie A*, Vol. 141, No. 1, pp. 14-63.
Teece, D.J. (1980). The Diffusion of an Administrative Innovation. *Management Science*, Vol. 26, No. 5, pp. 464-470.
Teotia, A.P.S.; Raju, P.S. (1986). Forecasting the Market Penetrating of New Technologies Using a Combination of Economic Cost and Diffusion Models. *Journal of Product Innovation Management*, Vol. 3, pp. 225-237.
Weisstein, E.W. (1999). *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*. CRC Press LLC.
Yin, X.; Goudriaan, J.; Lantinga, E.A.; Vos, J.; Spiertz, H.J. (2003). A Flexible Sigmoid Function of Determinate Growth. *Annals of Botany*, Vol. 91, No. 3, pp. 261-371.