

## **Valoración de modalidades de flexibilidad del tiempo de trabajo mediante una medida basada en la entropía de Shannon**

**Jordi Olivella Nadal, Albert Corominas Subias, Rafael Pastor Moreno**

Instituto de Organización y Control de Sistemas Industriales y Departamento de Organización de Empresas. Universidad Politécnica de Cataluña. IOC, Av. Diagonal, 647, planta 11, edificio ETSEIB.

**Palabras clave:** entropía, tiempo de trabajo, cuentas de hora, medida de la flexibilidad

### **1. Introducción**

La capacidad de los sistemas de producción de adaptarse a diversos volúmenes de actividad se ha convertido en un tema omnipresente en la literatura. En efecto, siendo muy difícil tener claras ventajas sobre los competidores y siendo la predicción del futuro prácticamente imposible, estar preparado para afrontar todo lo que pueda pasar es una buena solución.

Al diseñar sistemas productivos y la negociar las condiciones laborales, la utilidad de medir la flexibilidad es clara. Para identificar los diversos tipos de flexibilidad, es útil considerar un sistema formado por recursos, transformaciones y productos. Una de las fuentes de la flexibilidad es la capacidad de cambiar ciertos elementos básicos del sistema (Wadhwa et al., 2006). En este contexto la variabilidad de las horas de trabajo disponible es esencial.

Un elemento importante de la flexibilidad es, entonces, ajustar el número de empleados a las necesidades. Las relaciones entre los trabajadores y las compañías están reguladas por un sistema de normas generales, convenios colectivos y pactos particulares que determinan los horarios, número de horas de trabajo, razones de finalización de la relación laboral, etcétera. Estas condiciones determinan la posibilidad de las compañías de adaptar el volumen de trabajo a sus necesidades.

Medir en qué grado un sistema de condiciones proporciona flexibilidad no es inmediato. Generalmente, comparamos modalidades con diferencias complejas. Una solución habitual en la medida de la adaptabilidad es la adopción de una aproximación estocástica. Dada una distribución de la probabilidad de las necesidades futuras de trabajo, es posible calcular la probabilidad de adaptar la presencia del trabajador a las necesidades. Pero, de hecho, en este caso estamos evaluando el riesgo, no la flexibilidad (Kahyaoglu y Kayaligil, 2002).

Al programar el trabajo para las semanas siguientes, normalmente se utiliza una previsión de necesidades. La cuestión fundamental en este caso es la capacidad de hacer frente a errores en la previsión. Se espera que las necesidades reales tomen valores cercanos a los pronosticados. Por el contrario, los acuerdos entre una compañía y sus trabajadores sobre las horas de trabajo afectan a amplios períodos del tiempo y, en la mayoría de los casos, si no en todos, la distribución de probabilidades de las necesidades futuras se desconoce. Lo importante aquí es la capacidad de hacer frente a cualquier situación posible. Defendemos la medición de la flexibilidad generada por un sistema de condiciones se haga sin considerar ninguna predicción. Para hacerla, se define un espacio de estados posibles del sistema - aquí los estados son horas del trabajo requeridas en una secuencia de períodos de tiempo-. Se consideran dos medidas sencillas de la flexibilidad proporcionada por un conjunto de condiciones en la determinación del tiempo de trabajo: la proporción de estados accesibles con estas condiciones y el coste medio. Se define para ello una medida basada en la entropía de Shannon. Este tipo de medida se ha utilizado ya para

medir flexibilidad de la producción (Calinescu et al., 1998, A.Y. Chang, 2004, Kumar, 1987, Parker y Wirth, 1999, Piplani y Wetjens, 2007, Shuiabi et al., 2005), pero no había sido aplicada previamente a las condiciones sobre horarios de trabajo, hasta donde autores conocen. En el resto del artículo, en primer lugar, se describen las medidas mencionadas; en segundo lugar, se expone el procedimiento del cálculo de las medidas y se aplica al análisis de dos situaciones concretas, y, por último, se exponen las conclusiones de estas pruebas y del artículo.

## 2. Uso de la entropía para medir la flexibilidad del tiempo de trabajo

### 2.1. Conceptos

La flexibilidad es la capacidad de cambiar. Se pueden definir muchos tipos de flexibilidad (Toni y Tonchia, 1998). La flexibilidad que se estudia aquí es la flexibilidad del volumen del recurso productivo “trabajo”. Esta flexibilidad se puede utilizar para proporcionar cualquier clase de flexibilidad de la producción (de producto, composición, volumen y otras).

Las posibles métricas para determinar la flexibilidad van desde el simple recuento de los estados accesibles a otras más ambiciosas como la existencia de diversos caminos para alcanzar un objetivo. Para cualquier medida se necesita una definición de los estados posibles. Los estados posibles se presentan de manera natural para otros tipos de flexibilidad: para la flexibilidad del producto, el número de diversos productos o diversas familias de productos, y para la flexibilidad de las rutas, el número de trayectorias alternativas, por ejemplo. Para la flexibilidad del tiempo de trabajo hay que definir los períodos y las unidades de tiempo que se van a utilizar.

El nivel de flexibilidad de un del sistema depende de su capacidad para adaptarse a un conjunto de situaciones diversas. Por otra parte, el concepto de la flexibilidad esta relacionado con la idea de grupo de posibilidades (Pereira y Paulre 2001). Definiremos a continuación un espacio de estados posibles del sistema, y mediremos la flexibilidad en función de este espacio. También definiremos la libertad de elegir - tomando la terminología de Kumar (Kumar 1987) -, que mide la capacidad del sistema para alcanzar cierto estado teniendo en cuenta el coste.

#### 2.1.1 Espacio de estados posibles

El espacio de estados posibles (en adelante espacio de estados) estará formado por las distintas situaciones identificables del factor bajo escrutinio que tengan sentido en el caso objeto de estudio. Los espacios de estados considerados aquí son discretos. Cuando uno o más de los factores que definen los estados es continuo, el espacio de estados tiene que ser definido estableciendo intervalos asociados a un solo valor. Aquí, el factor “tiempo” ha de ser discretizado. La definición de los estados será convencional. Naturalmente, cualquier comparación entre los resultados sólo tendrá sentido si las medidas implicadas se calculan en base del mismo espacio de estados.

El espacio de estados que se utilizará para evaluar la flexibilidad del tiempo de trabajo se definirá en función del objetivo del análisis y de la potencia de cálculo disponible. Cuando se analizan los efectos de una cláusula a largo plazo, como se hace aquí, lo esencial es adaptar la presencia de trabajadores en periodos amplios. Bloques de miles de horas de trabajo en un mes, por ejemplo, podrían ser adecuados para definir los estados. Si tomamos un horizonte de un año, el estado  $i$  podría ser  $S_i = \{s_{it} \mid t=1..T\}$ , con periodos de tres meses ( $T=4$ ),  $s_{it}$  miles de horas de trabajo en el trimestre  $t$  y espacio de estados  $\Omega = \bigcup_{i \in I} \{S_i\}$ , donde  $I$  es el conjunto de índices de los estados. Este espacio de estados podría incluir situaciones materialmente imposibles. Parece razonable incluir un límite superior, definido por la posibilidad máxima de crecimiento de los

otros recursos o la demanda, y un límite inferior, debido a la indivisibilidad de las necesidades del trabajo y de un mínimo de eficacia operativa. Utilizaremos por tanto estados  $S_t = \{s_{it} \mid t=1..T; l \leq x_t \leq u\}$ , donde  $l, u$  son, respectivamente, límites inferior y superior de las horas trabajadas en un trimestre.

### 2.1.2 Libertad de elección

La libertad de elección ( $F$ ) refleja con qué facilidad el sistema alcanza un estado. Ciertos estados no serán factibles y otros serán accesibles solamente si se asume que un coste adicional. Se supone que el criterio para determinar las horas del trabajo es el mínimo coste que respeta las reglas y límites.

Cuando se cubre un estado sin ningún coste adicional,  $F$  tiene tomar el valor más alto - aquí será el valor 1. Cuando un estado no puede ser alcanzado, el valor será 0. Cuando el estado es accesible solamente si se asume un coste adicional, la función  $F$  debe tener en cuenta este coste. La eficacia determina la posibilidad real de utilizar la flexibilidad, y tiene que tener en cuenta al valorar la flexibilidad de un sistema productivo (Choi y Kim, 1998). De hecho, el coste determinará si una solución es provechosa o no (Parker y Wirth, 1999).

Para la flexibilidad del tiempo de trabajo tenemos en cuenta que los costes por encima del mínimo posible pueden generar ineficiencias. Proponemos la definición de  $F$  que sigue, derivada de la función logit, usada extensamente en situaciones de elección discreta (Small, 1987),

$$F(S_i) = \frac{e^{\alpha(1-\text{cost}(S_i))}}{\sum_{S_j \in \Omega} e^{\alpha(1-\text{cost}(S_j))}} \quad (1)$$

donde  $F$  es la libertad de elección,  $S_i$  el estado  $i$ ,  $\Omega$  espacio de estados,  $\text{cost}(S_i)$  es el coste de una hora de trabajo para el estado  $S_i$ , siendo el coste de una hora de trabajo ordinaria 1 y  $\alpha$  un parámetro convencional, cuya repercusión se discute más adelante.

## 2.2. Medida de la flexibilidad basada en la entropía (EMF)

La entropía emerge como concepto termodinámico. En términos generales el concepto se refiere a la semejanza de los valores de una magnitud en los diversos estados de un sistema. En la teoría de información, esta magnitud es una probabilidad, y como más similares son las probabilidades de los estados o los acontecimientos de un sistema más elevada es la entropía. En lenguaje común, se asocia a la confusión: cuanto más extendida es la probabilidad, tenemos menos información sobre qué sucederá en el futuro. Cuando utilizamos la entropía para medir la flexibilidad estamos adoptando un punto de vista distinto: cuando más se separan los estados factibles del sistema, más flexible es el sistema. Aquí, la entropía significa más opciones. Este uso de la entropía para medir flexibilidad fue introducido en el trabajo seminal de Kumar (Kumar, 1987), donde se exponen varias medidas de la entropía. La fórmula de la entropía más usada es la de Shannon, utilizada en teoría de la información. La fórmula es,

$$E(p_1, \dots, p_n) = -\sum_{i=1}^n p_i \ln p_i \quad \text{if } \forall i \quad p_i \neq 0, \quad 0 \quad \text{otherwise} \quad (2)$$

donde  $p_i$  es la probabilidad del estado  $i$  y  $E$  es la medida de la entropía.

Cuando se utiliza para la medir la flexibilidad, la fórmula de Shannon se puede aplicar a los

parámetros que reflejan la libertad de elección, en vez de a las probabilidades (An-Yuan Chang et al., 2001) – hemos definido una función de libertad de elección para el caso de la flexibilidad del tiempo de trabajo en la ecuación (1). La medida de la flexibilidad (*EMF*) que proponemos, basada en la entropía de Shannon, es

$$EMF(\Omega) = - \sum_{S_i \in \Omega} F(S_i) \ln F(S_i) \quad (3)$$

donde *F* es la libertad de elección según lo definido en (1). La entropía mide la semejanza de los valores de la función de libertad de elección en los estados del espacio de estados bajo consideración. Cuanto más similares son los valores, mayor es la entropía.

### 2.3. Medidas directas

Según lo indicado antes, se plantea medir la flexibilidad según la capacidad del sistema de alcanzar los estados de un espacio de estados y, para los casos factibles, el coste resultante. En este planteamiento, dos medidas son inmediatas, la proporción de estados factibles y el coste medio. La proporción de estados factibles (*p*) se define en la ecuación , donde *N* es el número total de estados de  $\Omega$  y *n<sub>f</sub>* el número de estados alcanzables, mientras que el coste medio ( $\mu_{cost}$ ) se define en la ecuación , siendo *cost* la función que da el coste para alcanzar cierto estado usando la solución óptima para el caso.

$$p = n_f / N \quad (4)$$

$$\mu_{cost} = \frac{\sum_{S_i \in \Omega} cost(S_i)}{N} \quad (5)$$

Estas dos medidas reflejan aspectos parciales pero críticos de la flexibilidad, como son alcance de la viabilidad y la eficacia.

### 2.4. Interpretación de las medidas

Una interpretación adecuada de las tres medidas definidas debe darnos información abundante sobre el nivel de flexibilidad de un cierto sistema de condiciones para determinación del tiempo del trabajo. Se exponen en la Tabla 1 cinco situaciones simplistas. El caso (a) tiene seis estados, todos ellos con coste 1, o sea, sin coste adicional. La proporción de coste factible y el valor de *EMF* (para 6 estados) alcanzan un máximo y el coste medio un mínimo. En este caso el valor del parámetro  $\alpha$  tomado en la formulación de *F* no influye el resultado. Los casos siguientes son ejemplos del efecto sobre las medidas de valores más altos del coste de los estados (b), de menos estados (c) y ambos (d). La comparación entre (d) y (e) acentúa la utilidad de *EMF*. Son casos muy diversos con iguales proporción de estados factible y coste medio. Solamente *EMF* refleja la diferencia. Finalmente, los valores de *EMF* que se obtienen con valores 5 y 20 del parámetro  $\alpha$  muestran que cuanto mayor es  $\alpha$  mayores son las variaciones de *EMF* entre un caso y otro. Las comparaciones, naturalmente, solo tienen sentido cuando se ha utilizado el mismo valor de  $\alpha$  en todo el cálculo.

**Tabla 1.** Ejemplos simples de uso de las medidas de flexibilidad

Caso	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
Coste de los estados de cada caso	1	1	1	1	1.25
	1	1.1	1	1.16	1.25
	1	1.2	1	1.33	1.25
	1	1.3	1	1.5	1.25
	1	1.4			
	1	1.5			
Proporción de estados factibles	100%	100%	100%	66%	66%
Coste medio	1	1.25	1	1.25	1.25
EMF con alfa 5	1.792	1.495	1.386	1.062	1.386
EMF con alfa 20	1.792	0.458	1.386	0.177	1.386

### 3. Aplicación

#### 3.1. Procedimiento de obtención

Para mostrar al uso de las medidas de la flexibilidad de las modalidades de tiempo de trabajo, se define y se analiza una muestra conveniente de casos. En primer lugar, se modelizan las modalidades de tiempo de trabajo que han de ser utilizadas. Las cuentas de horas de trabajo (WTAs) son un ejemplo interesante, porque son un esquema muy flexible. La modalidad WTAs permite que una compañía pida a los trabajadores que amplíen o que reduzcan las horas de trabajo, acumulando la diferencia en una cuenta y sin ninguna repercusión en los pagos. A un trabajador se le puede pedir que una semana trabaje 10 horas más, por ejemplo, sin paga adicional. La compañía deberá 10 horas a ese trabajador, pero no ha de compensar esta situación. Cuando la compañía no necesita a los trabajadores las horas establecidas, se hacen jornadas más cortas y la cuenta de horas se carga a favor de la compañía.

Con las WTAs no hay ningún punto en el cual el equilibrio entre las horas contractuales y las horas trabajadas tenga que ser cero. Las WTAs tienen generalmente límites superior y inferior, por período y en total. Cuando se alcanza el límite superior, normalmente se puede utilizar como alternativa el tiempo suplementario pagado. Este método proporciona flexibilidad a largo plazo, puesto que no hay punto en el cual la cuenta debe ser equilibrada, y tiene la característica particular de ajustar las horas de funcionamiento a las necesidades sin usar despidos. La modalidad de WTAs se está utilizando cada vez más en algunos países porque permite combinar la estabilidad y de flexibilidad del personal en el uso del tiempo del trabajo de la compañía (Lehndorff, 1998). El programa lineal para obtener las soluciones óptimas para esta modalidad se presenta en el apéndice 1.

Se considera una segunda modalidad, contratar y despedir (H&F). Como el nombre indica, consiste en la obtención de flexibilidad cambiando el número de trabajadores. H&F ha sido analizado por (Silva et al., 2000). El programa lineal para obtener las soluciones óptimas para esta modalidad se presenta en el apéndice 2.

El procedimiento es el siguiente: El primer paso es definir y formular un modelo apropiado - aquí un programa lineal entero - y seleccionar un espacio de estados para que la modalidad sea analizada. El modelo incluirá varios parámetros. Diversos valores de estos parámetros definirán los casos de cada modalidad. Cada caso tiene que ser analizado buscando las soluciones para cada estado del espacio de estados. Al aplicar la rutina de la optimización, las situaciones irrealizables serán detectadas y rechazadas. Los resultados factibles y su coste se guardan. Con estos valores y usando las fórmulas (2), (3) y (5) se calculan las medidas de flexibilidad.

En el ejemplo que sigue tomamos el parámetro  $\alpha=20$  en la fórmula de la libertad de elección ( $F$ ). Con este valor las diferencias entre los casos se muestran claramente. Los programas lineales enteros son resueltos usando CPLEX 9.0 en una PC convencional. Para los casos analizados aquí, el tiempo de cálculo es insignificante para cada optimización y toma no más algunos minutos para cada caso. Se toma por otra parte un espacio de estados relativamente simple. El espacio de estados está formado variando el volumen de horas de 80.000 a 240.000, en pasos de 16.000 horas y en 4 períodos (que se pueden interpretar como trimestres). Estamos considerando por tanto 11 posibilidades por período, y en consecuencia, incluyendo todas las posibilidades, los estados son  $11^4=14,641$ . Las horas regulares de trabajo por trabajador y período se suponen que son 400. Los valores centrales del espacio (160.000 horas para cada período) serían cubiertos exactamente con 400 trabajadores.

### 3.2. Ejemplo: Comparación entre modalidades

Un uso de las medidas de flexibilidad dos modalidades. La modalidad WTAs se compara con modalidad H&F, es decir, la flexibilidad basada sobre horas de trabajo variables de un personal estable se compara con la flexibilidad basada en los cambios del tamaño de la plantilla. Para hacerlo, tomamos una colección de diversos valores de los parámetros que defina cada modalidad y calculamos las medidas de flexibilidad para cada caso.

**Tabla 2.** Medidas de flexibilidad en la modalidad de contratación y despido (H&F).

horas extra: límite supe.    coste		coste de la contratación							
		200		400		800		1200	
		coste	EMF	coste	EMF	coste	EMF	coste	EMF
100	1,5	1,102	9,647	1,163	9,241	1,224	8,847	1,272	8,592
100	2	1,102	9,647	1,204	9,002	1,272	8,501	1,321	8,220
200	1,5	1,102	9,647	1,146	9,361	1,174	9,205	1,189	9,155
200	2	1,102	9,647	1,204	9,002	1,249	8,654	1,268	8,539

Los resultados para la modalidad H&F se presentan en la Tabla 2. Consideramos una plantilla inicial de 400 trabajadores, horas regulares de trabajo por periodo 400, dos pares de valores del límite superior de las horas extra (100, 200), cuatro distintos valores de coste de la contratación (200, 400, 800, 1200), dos distintos valores del coste de las horas extra (1,5; 2), un coste de una hora de trabajo regular igual a 1 y coste del despido 0. Los resultados se pueden considerar como referencia de una flexibilidad muy alta, debido al despido sin coste. La proporción de estados factibles es del 100% en todos los casos. Cuanto más alto es el coste de contratar, más alto es el coste medio y más bajo es EMF, porque un coste más alto en algunos estados hace que los resultados sean menos homogéneos.

**Tabla 3.** Medidas de flexibilidad en la modalidad de cuenta de horas (WTA).

límites de los saldos finales de las cuentas de horas	horas extra: límite superior; coste	numero trabajadores	límites horas trabajadas: supe. y infe. usando las cuentas; supe. total								
			300 a 500; 500			300 a 500; 600			200 a 600; 600		
			pef	coste	EMF	pef	coste	EMF	pef	coste	EMF
-400 a 400	100; 1,5	350	28%	1.074	7.957	99%	1.068	9.328	99%	1.008	9.546
	200; 1,5	300	28%	1.077	7.973	100%	1.084	9.289	100%	1.028	9.445
	200; 2	300	28%	1.080	7.958	100%	1.120	9.029	100%	1.057	9.273
-800 a 800	100; 1,5	350	28%	1.074	7.956	100%	1.066	9.340	100%	1.000	9.591
	100; 2	350	28%	1.074	7.956	100%	1.085	9.240	100%	1.000	9.589

Por otra parte, los resultados para la modalidad de WTAs se exponen en la Tabla 3. Consideramos una plantilla inicial de 400 trabajadores, horas regulares de trabajo por periodo 400, dos pares de límites inferior y superior de la cuenta de horas (de -400 a 400 y de -800 a 800), dos pares de límites inferiores y superiores de las horas trabajadas utilizando la flexibilidad de la cuenta de horas (de 300 a 500 y de 200 a 600) y dos límites superiores de las horas trabajadas en total (500 y 600), que incluyen pues las horas extra. El tamaño de la plantilla se reduce según la posibilidad de usar en horas extras.

Podemos ver en el resultado que en el primer bloque (límites de las WTAs de 300 a 500 horas, límite total superior de 500) las horas extra no se pueden utilizar. En el bloque siguiente el uso de horas extra aumenta el valor de las medidas de flexibilidad, con la excepción del coste medio.

Una comparación directa entre ambas modalidades, tomando los mismos parámetros, no es posible, porque los parámetros en una modalidad son diferentes de los parámetros de la otra. Los niveles de flexibilidad que se pueden alcanzar con cada modalidad tienen que ser comparados globalmente. En estos términos, H&F parece ser más flexible pero costoso. Por otra parte, en los casos con menos restricciones WTA proporciona flexibilidad total sin ningún coste.

#### **4. Conclusiones**

Se ha abordado el problema de la medida de flexibilidad de las modalidades de determinación del tiempo de trabajo sin utilizar un pronóstico de la demanda. Se ha definido una medida basada en la entropía. Como un solo parámetro no puede ofrecer suficiente información para ser una medida conveniente de un fenómeno tan complejo, se han propuesto dos medidas complementarias, la proporción de estados factibles y el coste medio.

Se ha desarrollado un ejemplo de utilización. Concluimos de este análisis que las medidas definidas se pueden calcular para ejemplos de tamaño moderado un PC convencional. Una segunda conclusión es que las medidas son útiles ya sintetizan las características de la flexibilidad de los casos bajo análisis. Se propone desarrollar, en futuros trabajos, herramientas para facilitar a las compañías el uso de estas medidas.

#### **Referencias**

Calinescu, A.; Efstathiou, J.; Schirn, J.; Bermejo, J. (1998). Applying and assessing two methods for measuring complexity in manufacturing. *Journal of the Operational Research Society*, Vol 49, No.7, pp.723.

Chang, A.Y.; Whitehouse, D.J.; Chang, S.L.; Hsieh, Y.C. (2001). An approach to the measurement of single-machine flexibility. 1589 - 1601: Taylor & Francis

Chang, A.Y. (2004). On the measurement of labor flexibility. Paper presented at the Engineering Management Conference.

Choi, S.H.; Kim, J.S. (1998). A study on the measurement of comprehensive flexibility in manufacturing systems. *Computers & Industrial Engineering*, Vol 34, No.1, pp.103-118.

Kahyaoglu, Y.; Kayaligil, S. (2002). Conceptualizing manufacturing flexibility: an operational approach and a comparative evaluation. *International Journal of Production Research*, Vol 40, No.10, pp.2187-2206.

- Kumar, V. (1987). Entropic measures of manufacturing flexibility. *International Journal of Production Research*, Vol 25, No.7, pp.957-966.
- Lehndorff, S. (1998). *New working time systems, work organisation and re-distribution of work*. Düsseldorf: Institut Arbeit und Technik Abteilung Arbeitsmarkt
- Parker, R.P.; Wirth, A. (1999). Manufacturing flexibility: Measures and relationships. *European Journal of Operational Research*, Vol 118, No.3, pp.429-449.
- Piplani, R.; Wetjens, D. (2007). Evaluation of entropy-based dispatching in flexible manufacturing systems. *European Journal of Operational Research*, Vol 176, No.1, pp.317-331.
- Shuiabi, E.; Thomson, V.; Bhuiyan, N. (2005). Entropy as a measure of operational flexibility. *European Journal of Operational Research*, Vol 165, No.3, pp.696-707.
- Silva, J.P.; Lisboa, J.; Huang, P. (2000). A labour-constrained model for aggregate production planning. *International Journal of Production Research*, Vol 38, No.9, pp.2143-2152.
- Small, K.A. (1987). A Discrete Choice Model for Ordered-Alternatives. *Econometrica*, Vol 55, No.2, pp.409-424.
- Toni, A.D.; Tonchia, S. (1998). Manufacturing flexibility: a literature review. *International Journal of Production Research*, Vol 36, No.6, pp.1587-1617.
- Wadhwa, S.; Rao, K.S.; Chan, F.T.S. (2006). Comparative influence of three flexibility types on manufacturing lead-time performance. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol V29, No.9, pp.1002-1007.

## Anexo 1

Para obtener un modelo para la planificación del tiempo de trabajo en presencia de WTAs, definimos  $W$ , número de trabajadores,  $T$  número de periodos en el horizonte de planificación,  $s_0$ , saldo de la cuenta de horas para todos los trabajadores en el instante inicial,  $h$ , horas regulares o de referencia por periodo y trabajador,  $h^+$  y  $h^-$ , límite superior y inferior, respectivamente, del número de horas de trabajo por  $f$  periodo y trabajador incluidas en las cuentas,  $h^{++}$ , límite superior del número de horas de trabajo por periodo y trabajador incluidas las horas extra,  $B^+$  and  $B^-$ , límite superior y inferior, respectivamente, del saldo de la cuenta de horas por trabajador,  $c_r$ , coste de una hora de trabajo regular,  $c_o$ , coste de una hora  $u$ , límite superior del número de horas extra por periodo y trabajador. El parámetro  $s_{it}$  es la capacidad a obtener en el periodo  $t$  para es estado  $S_i$ .

Las variables son  $x_t$  (sin restricción de signo), diferencia entre las horas de trabajo y el valor de referencia por trabajador y por periodo,  $e_t$  ( $e_t \geq 0$ ), variable no negativa que representa las horas extra en el periodo  $t$  por trabajador y  $b_t$  saldos de las cuentas de horas en el período  $t$  por trabajador, que puede ser negativo (cuál indica que los trabajadores deben horas a la compañía), nulo o positivo (que indica que la compañía debe horas a los trabajadores).

Para definir la combinación de coste mínimo que cubra  $(st_{i1} \dots st_{iT})$  definimos el programa lineal,



$$[MIN]z = W \cdot \left( \sum_{t=1, \dots, T} c_o \cdot e_t + c_r \cdot b_T \right) \quad (6)$$

$$b_t = b_{t-1} + x_t - e_t \quad t = 1 \dots T \quad (7)$$

$$W \cdot (h + x_t) \geq s_{it} \quad t = 1 \dots T \quad (8)$$

$$0 \leq e_t \leq u \quad t = 1 \dots T \quad (9)$$

$$h^- \leq x_t + h \leq h^{++} \quad t = 1 \dots T \quad (10)$$

$$x_t - e_t \leq h^+ - h \quad t = 1 \dots T \quad (11)$$

$$B^- \leq b_t \leq B^+ \quad t = 1 \dots T \quad (12)$$

donde (6) es la función objetivo, que es el saldo final de las cuentas de horas por el coste de las horas regulares más el total de horas extra por su coste, es decir, los elementos variables del coste total, (7) expresa, para cada período, el saldo de las cuentas de horas, (8) expresa que el número de las horas de trabajo tiene que ser superior o igual a la capacidad deseada, (9) impone el límite superior, para cada período, las horas extra, (10) imponen los límites superior y inferior a las horas de trabajo, (11) imponen el límite superior y inferior de de las horas de trabajo que no son horas extra (12) impone los límites superior y inferior de las cuentas de horas.

## Anexo 2

Aquí los datos son  $W_0$ , número de trabajadores en el momento 0,  $T$ , número de periodos en el horizonte de planificación,  $h$ , horas regulares o de referencia por periodo y trabajador,  $c_r$ , coste de una hora de trabajo regular,  $c_o$ , coste de una hora extra,  $u$ , límite superior del número de horas extra por periodo y trabajador y  $c_h$ , coste de contratar un nuevo trabajador. El parámetro  $st_{it}$  es la capacidad a obtener en el periodo  $t$  para el estado  $S_i$ . El coste del despido es tomado igual a cero.

Las variables son  $W_t$ , número de trabajadores durante el período  $t$ ,  $H_t$ , número de trabajadores contratados al inicio del período  $t$ ,  $F_t$ , número de trabajadores despedidos después al inicio del período  $t$  y  $E_t$ , horas extra en el periodo  $t$  del total de la plantilla, siendo todas ellas variables no negativas.

Para definir la combinación de coste mínimo que cubra ( $st_{i1} \dots st_{iT}$ ) definimos el programa lineal,

$[MIN]z = \sum_{s=1, \dots, T} h \cdot c_r \cdot W_s + H_s \cdot c_h + E_s \cdot c_o$		(13)
$W_{t-1} + H_t - F_t = W_t$	$t = 1 \dots T$	(14)
$h \cdot W_t + E_t \geq st_{it}$	$t = 1 \dots T$	(15)
$E_t \leq u \cdot W_t$	$t = 1 \dots T$	(16)

ndonde (13) es la función objetivo que representa el coste total, (14) expresa la congruencia entre número anterior de empleados, contrataciones, despidos y número actual de trabajadores, (15) expresa que el número de las horas de trabajo tiene que ser superior o igual a la capacidad deseada y (16) impone el límite superior, para cada período, de las horas extra.