II International Conference on Industrial Engineering and Industrial Management
XII Congreso de Ingeniería de Organización
September 3-5, 2008, Burgos, Spain

Determinación de las capacidades de fabricación y almacenaje óptimas en un sistema con logística inversa y demanda periódica

Ernest Benedito Benet[1,2], Albert Corominas Subias[1,2]

[1] Departament d'Organització d'Empresas (OE). Universitat Politècnica de Catalunya (UPC). Avda. Diagonal, 647. Edifici A, planta 7. 08028 Barcelona
[2] Institut d'Organització i Control de Sistemes Industrials (IOC). Universitat Politècnica de Catalunya (UPC). Avda. Diagonal, 647. Edifici H, planta 11. 08028 Barcelona

Resumen

La logística inversa influye significativamente en el sistema productivo de las compañías. Cuando hay remanufactura, uno de los factores a tener en cuenta es la cantidad de producto retornado para refabricar. En este trabajo se muestra un método para calcular la capacidad de fabricación y almacenaje óptimos en un sistema con logística inversa y se aplica para estudiar la dependencia de estos valores óptimos con los retornos.

Palabras clave: Logística inversa, refabricación

1. Introducción

La legislación española responsabiliza a las empresas fabricantes y distribuidoras de productos de los daños que éstos puedan causar en el medioambiente cuando finaliza su vida útil (Rubio 2003). La correcta gestión de los productos fuera de uso puede ser rentable: por un lado, mejora la imagen de la empresa, ya que su gestión contribuye a la sostenibilidad medioambiental, y por otro lado, los productos pueden ser reutilizados con el consiguiente beneficio económico.

En este sentido, la logística inversa es un área de gestión cada vez más importante ya que es necesaria para la correcta gestión de los residuos y productos fuera de uso. Thierry et al. (1995) clasifica las tareas para la recuperación de lo productos en categorías, de las cuales, las más importantes son: reutilización directa, reparación de productos defectuosos, refabricación y reciclaje. Cualquiera de las tareas de recuperación de los productos conlleva cambios en la gestión de la producción y almacenaje de los productos.

En los últimos años existe un interés creciente por la logística inversa cómo área de investigación (Rubio et al. 2008; Choi et al., 2007; Kiesmüller et al., 2004), sin embargo, no es frecuente encontrar trabajos que estudien el impacto de la recuperación de productos en la capacidad de fabricación.

Es evidente que, al refabricar productos, las compañías deben modificar su sistema productivo, añadiendo ciertas capacidades para las tareas de recuperación y remanufactura, y que, dependiendo de las tareas de reutilización y refabricación que se realicen, habrá una disminución de las necesidades de fabricación de producto nuevo. Con este enfoque en

Benedito y Corominas (2007) se proporciona un método para calcular las capacidades de fabricación y refabricación en un sistema con logística inversa.

Uno de los factores que influyen en el cálculo de la capacidad de fabricación, refabricación y almacenaje cuando hay logistica inversa es el comportamiento de los retornos en cuanto a la cantidad y momento en que se producen (Rubio y Corominas, 2008).

En este trabajo se describe un método para calcular la capacidad de fabricación y de almacenaje en un sistema con logística inversa en el que la demanda es determinista y los retornos dependen de la demanda. Utilizando el método descrito, se muestra un ejemplo de la influencia que tiene la función de los retornos en las capacidades de fabricación y almacenaje.

El resto del trabajo se compone de cinco secciones más. En la segunda sección se describe el sistema que se va a estudiar. En la tercera, se proporciona un método para calcular la política de fabricación óptima, considerando fijadas las capacidades de fabricación y almacenaje. En la cuarta, se calculan las capacidades de fabricación y almacén óptimas utilizando el método descrito en la sección anterior. En la quinta, se aplica el método explicado en las secciones anteriores para estudiar la influencia del desfase de los retornos en las capacidades ópitmas de fabricación y almacenaje. Finalmente se exponen las principales conclusiones del trabajo.

2. Descripción del sistema

Se trata de una compañía que produce y vende un tipo de producto, y que puede recuperar el producto una vez ha finalizado su vida útil y mediante un proceso de refabricación o reutilización, lo puede volver a vender en las mismas condiciones que un producto nuevo. La variable temporal del sistema es continua. Se definen las siguientes funciones dependientes del tiempo:

- $d(t)$ Demanda del producto (unidades de producto por unidad de tiempo)
- $u_r(t)$ Productos retornados para refabricar (unidades de producto por unidad de tiempo)
- $p(t)$ Fabricación de producto nuevo (unidades de producto por unidad de tiempo)
- $r(t)$ Refabricación de producto retornado (unidades de producto por unidad de tiempo)
- $I(t)$ Stock de producto acabado (unidades de producto)

La compañía dispone de inventario de producto acabado $I(t)$ que se alimenta del sistema de producción a un ritmo $p(t)$ y del sistema de refabricación de productos retornados a un ritmo $r(t)$; se supone que la compañía no admite rupturas de inventario.

El sistema tiene las siguientes características:

- La demanda del producto es una función periódica de periodo T, no negativa con primera derivada continua.
- La función de los retornos depende de la demanda, siendo $u_r(t) = \rho d(t-\tau)$ dónde ρ es la tasa de retorno y τ es el desfase temporal entre la venta del producto y el retorno.
- La demanda es mayor que los retornos $d(t) \geq \rho d(t-\tau)$.

- La compañía refabrica todo el producto retornado en el momento que lo recibe, es decir $r(t) = u_r(t) = \rho d(t-\tau)$.

- El sistema está en estado estacionario, es decir, las funciones del sistema que dependen del tiempo toman el mismo valor en t y en $t+T$.

Función de coste

Para la función de costes, se tienen los siguientes:

- *c* coste variable de fabricar una unidad de producto nuevo.

- *h* coste de inventario final: es el coste por unidad de tiempo de tener una unidad de producto final en el inventario.

- *C(P)* coste fijo de fabricación de producto nuevo que depende de la capacidad de fabricación *P*, es decir de la tasa máxima de fabricación que se puede alcanzar.

- *H(S)* coste fijo del almacén de producto final que depende de la capacidad del almacén de producto terminado *S*.

- Se supone que *c* y *h* son constantes y *C(P)* y *H(S)* son funciones continuas con primera derivada no negativa y continua.

Se define la función de demanda neta: $\hat{d}(t) = d(t) - \rho d(t-\tau)$ que es una función determinista, periódica de periodo T, no negativa, con primera derivada continua.

Los costes incurridos en el periodo *T* son:

$$c_T = C(P) + H(S) + \int_0^T hI(t)dt \tag{1}$$

Deben cumplirse las siguientes restricciones:

$$\frac{dI}{dt} = p(t) - \hat{d}(t) \tag{2}$$

$$0 \le p(t) \le P \tag{3}$$

$$0 \le I(t) \le S \tag{4}$$

Teniendo en cuenta las condiciones expuestas, las capacidades de fabricación y almacén óptimas se obtendrán de resolver el programa matemático que maximiza (1) sujeto a las restricciones (2), (3) y (4).

Integrando (2) entre $t = 0$ y $t = T$ se obtiene:

$$\int_0^T p(t)dt = \int_0^T \hat{d}(t)dt \tag{5}$$

El programa se resolverá en 2 etapas: en primer lugar se determinará la política óptima de fabricación para unas capacidades P, S dadas y en segundo lugar se calcularán las capacidades óptimas de fabricación y almacenaje de producto final.

3. Política de fabricación óptima

Suponiendo que la capacidad de fabricación P y la capacidad del almacén S están fijadas, en esta sección se determinará la política óptima de fabricación. En primer lugar se expone un caso sencillo a modo de ejemplo y a continuación se generaliza para sistemas con funciones de demanda periódicas.

3.1. Supuesto simplificado

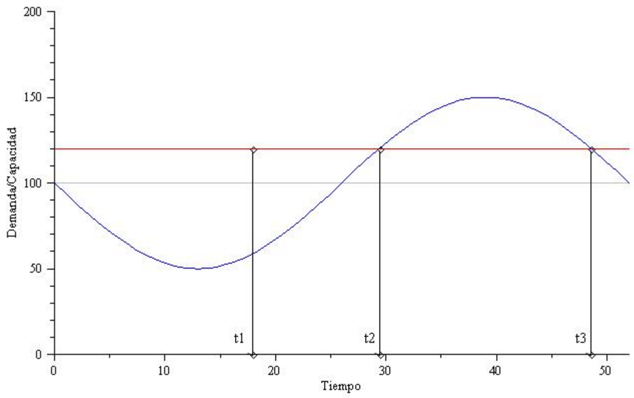

Figura 1: Gráfico de la demanda en un intervalo de 52 semanas. Los puntos marcados corresponden a t_1 = 17,9, t_2 = 29,4 y t_3 = 48,6. La línea horizontal roja indica la capacidad de fabricación y la línea horizontal gris indica el valor medio de la demanda.

Se empieza considerando el caso de una empresa con una demanda con comportamiento senoidal de periodo 52 semanas con valor medio de 100 uds/semana (figura 1). Si se quiere suministrar toda la demanda, la capacidad de producción será como mínimo de 100 uds/semana. Si éste es el caso, la empresa siempre fabricá al máximo de su capacidad y dispondrá de inventario suficiente para cubrir la demanda entre t = 26 y t = 52 ya que durante este intervalo de tiempo la demanda será mayor que la capacidad de producción.

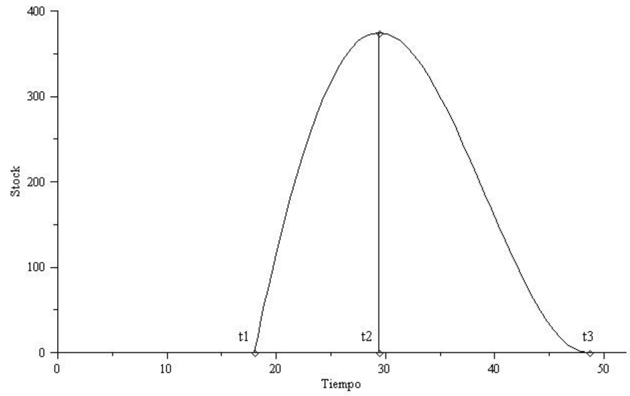

Figura 2: Gráfico del stock utilizando una política de producción ópitma con capacidad de producción 120 uds/semana. Los puntos marcados corresponden a t_1 = 17,9, t_2 = 29,4 y t_3 = 48,6.

Para calcular la capacidad del almacén basta darse cuenta que el máximo stock se alcanzará en la semana $t = 26$ (ya que a partir de este momento la producción no cubre la demanda) y el stock mínimo se alcanzará en $t = 52$. La diferencia de stock entre estas dos semanas es el área delimitada por la curva de la demanda y la de capacidad de producción entre $t = 26$ y $t = 52$ y su valor es 827,6. Por tanto, la capacidad de almacén será como mínimo $S = 827{,}6$ uds.

Se supone ahora que la capacidad de producción es de 120 uds/semana. Tal como se muestra en la figura 2 el instante de máximo stock es $t_2 = 29{,}4$ y el del mínimo es $t_3 = 48{,}6$. Realizando un cálculo análogo al del caso anterior se tiene que la capacidad de almacén mínima debe ser de $S = 374{,}7$ uds. En algún momento antes de t_2 se empezará a producir al máximo de la capacidad para acumular existencias y llegar a t_2 con el inventario necesario. Sea t_1 este instante que se calcula igualando S al excedente de producción entre t_1 y t_2. Tal como muestra la figura 1, $t_1 = 17{,}9$. Por tanto, la política de fabricación óptima será producir el máximo posible entre t_1 y t_3 y fuera de este intervalo de tiempo la producción deberá ser igual a la demanda.

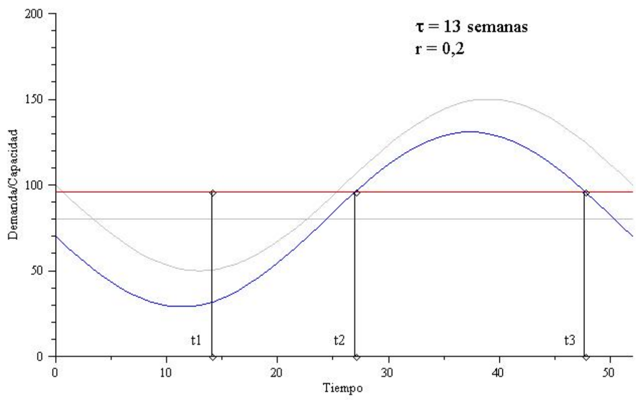

Figura 3: Gráfico de la demanda neta (demanda - retornos) con desfase 0 ($\tau = 13$). Los puntos marcados corresponden a las semanas $t_1 = 14{,}1$, $t_2 = 27{,}0$ y $t_3 = 47{,}7$. $S = 470{,}0$. La linea horizontal roja indica la capacidad de fabricación y la línea horizontal gris indica el valor medio de la demanda neta. La curva gris es la demanda sin retornos.

Supóngase ahora que hay un retorno de producto que se vuelve a vender como nuevo después de pasar por un proceso de refabricación y que τ son las semanas que transcurren desde la venta inicial hasta que el producto vuelve a estar disponible para vender. Se supone que se retorna el 20% de las ventas ($\rho = 0{,}2$) y se quiere saber la capacidad de almacén necesaria. Para ello se analiza la curva de demanda neta (demanda menos retornos), tal como se hecho en los casos anteriores en que no había retornos para tres valores de τ distintos (0, 13 y 26 semanas). En la figura 3 se ve que para cada $\tau = 13$, el requerimiento de capacidad de almacén y el intervalo de tiempo entre t_1 y t_3 en el cual se produce al máximo. En los tres casos estudiados se ha fijado una capacidad de producción de 96 uds (es un 20% superior a la demanda neta media).

En la tabla 1 se muestra el resumen de los resultados obtenidos para diferentes valores del desfase de los retornos.

Tabla 1: Tiempos y capacidades de almacén requeridas para un sistema con demanda senoidal y retornos del 20% con desfase τ.

Desfase (τ)	t_1	t_2	t_3	S
0	17,9	29,4	48,6	299,8
13	14,1	27,0	47,7	470,0
26	14,4	28,2	49,8	612,6

Del estudio expuesto se extraen las siguientes conclusiones para una función de demanda periódica con un pico y un valle:

- La capacidad de fabricación determina los requerimientos mínimos de almacén.
- Cuando el sistema tiene retornos, los requerimientos de almacén dependen de la capacidad de fabricación y del desfase entre la venta y el retorno del producto. Obsérvese que la capacidad de almacén cuando el desfase es de 26 semanas es el doble que con un desfase de 0 semanas.

A continuación se extienden las conclusiones anteriores al caso general de funciones de demanda periódicas.

3.2. Caso general

Dados P y S el programa se resuelve siguiendo a Sethi y Thompson (2003):

Sean I_{max} e I_{min} los valores en los que el stock es máximo y mínimo respectivamente. La solución del programa (11) deberá cumplir que $I_{min} = 0$ ya que en el caso que fuera $I_{min} > 0$ se podría tener una solución del programa con $I^*(t) = I(t) - I_{min}$ con coste inferior.

Sea $t_2 \in [0,T]$ un instante en que el stock es máximo, ($I(t_2) = I_{max}$). Si $I_{max} = 0$, la política óptima es $p(t) = \hat{d}(t)\ \forall t$.

Si $I_{\max} \neq 0$, considérese t_1 y t_3 los instantes anterior y posterior a t_2 respectivamente, más próximos a t_2 en que el stock es mínimo ($I(t_1) = I(t_3) = 0$). Se sabe que t_1, t_2 y t_3 existen porque $I(t)$ es continua y periódica. Para determinar sus valores se procede según el método expuesto en Benedito y Corominas (2008). Se distinguen dos casos:

1. Si $P - \hat{d}(t) \geq 0\ \ \forall t \in [0,T]$, entonces $I_{max} = 0$.
2. En caso contrario:

   (a) Determinar los conjuntos U y V definidos como:

   $$\mathsf{U} = \{x \in [0,T] \,|\, \hat{d}(x) = P \text{ y } \hat{d}'(x) \geq 0\}$$

   $$\mathsf{V} = \{y \in [0,2T] \,|\, \hat{d}(y) = P \text{ y } \hat{d}'(y) \leq 0\}$$

   (b) Calcular I_{max} utilizando la siguiente expresión:

   (c) $$I_{\max} = \max\{\int_x^y (\hat{d}(t) - P)dt \mid x \in \mathsf{U}, y \in \mathsf{V}, x < y < x+T\} \quad (6)$$

(d) t_2 y t_3 son los elementos de U y V, respectivamente, que cumplen (6)

(e) El instante t_1 es el más cercano a t_2 que cumple $t_1 \le t_2$ y

$$\int_{t_1}^{t_3}(P-\hat{d}(t))dt=0$$

La política óptima en el intervalo $[t_1,t_3]$ es $p(t) = P$ ya que cualquier otra política tiene un coste superior según se demuestra en Benedito y Corominas (2008).

Debido a que el sistema es periódico, si se conoce la política óptima en el intervalo $[t_1,T+t_1]$ es inmediato calcularla en $[0,T]$. La ventaja de utilizar el intervalo $[t_1,T+t_1]$ es que sólo queda por calcular la política óptima en el subintervalo $[t_3,T+t_1]$ que cumple $I(t_3)=I(T+t_1)=0$.

Sea $t_3' \in [t_3,T+t_1]$ el instantante más próximo a $T+t_1$ tal que $\hat{d}(t_3)=P$ es decir:

$$t_3' = \max\{t \in \mathsf{V} \cap [t_3,T+t_1]\}$$

La política óptima en el intervalo $[t_3',T+t_1]$ es $p(t)=\hat{d}(t)$. (Benedito y Corominas, 2008).

La política óptima en el intervalo $[t_3,t_3']$: sea $t_1' \in [t_3,t_3']$ el instante más próximo a t_3' tal que

$$\int_{t_1'}^{t_3'}(P-\hat{d}(t))dt=0 \qquad (7)$$

Entonces la política óptima en el intervalo $[t_1',t_3']$ es $p(t)=P$.

La politica óptima en el intervalo $[t_3,t_1']$ se calcula de forma recursiva utilizando el razonamiento expuesto en esta sección sustituyendo $T+t_1$ por t_1'.

4. Capacidades de fabricación y almacén óptimas

Dada una capacidad de fabricación S, la capacidad óptima del almacén S es igual a I_{max} ya que si fuera superior se tendría una capacidad de almacén que nunca se iba a utilizar y si fuera inferior se producirían rupturas de inventario.

Obsérvese que I_{max}, S, t_2 y t_3 dependen de P ya que todos ellos dependen del valor de los elementos de U y V, y estos dependen de P.

Se definen $P_{\min} = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{d}(t)dt$ y $P_{\max} = \max_{t\in[0,T]} \hat{d}(t)$.

Para valores de P inferiores a P_{min} no existe ninguna política de fabricación que cumpla (5) y por tanto el el programa matemático definido por (1), (2), (3) y (4) no tiene solución factible. Para $P \ge P_{\max}$, $I_{max} = 0$. Debido a que $C(P)$ es una función creciente, los costes minimos para $P \ge P_{\max}$ se alcanzan en $P = P_{max}$.

Por tanto la capacidad óptima de fabricación se encuentra en el intervalo $[P_{\min}, P_{\max}]$. Dado un valor de $P \in [P_{\min}, P_{\max}]$, el coste c_T incurrido en un periodo $[0,T]$ se calcula siguiendo los siguientes pasos:

1. Se determina la política óptima de fabricación $p^*(P,t)$ según el procedimeinto decrito en la sección 3
2. Se calcula *I(t)* integrando (2): $I(t) = \int_{t_1}^{t} (p^*(P,t') - \hat{d}(t'))dt'$
3. Se calcula el coste incurrido en el perido $[0,T]$:

$$c_T = C(P) + H(S(P)) + h\int_0^T I(t)dt \tag{9}$$

La expresión *S(P)* representa la dependencia entre *S* y *P* descrita en esta sección y *p*(P,t)* es la política óptima cuando la capacidad de producción es *P* descrita en la sección 3. El valor ópitmo de la capacidad se calcula numéricamente utilizando los pasos anteriores para valores de $P \in [P_{\min}, P_{\max}]$.

5. Dependencia de las capacidades óptimas respecto del desfase

En la sección 3 se mostró que si se mantiene fija la capacidad de fabricación y se consideran diferentes valores del desfase, entonces se obtienen diferentes valores de la capacidad de almacén, es decir, que hay una dependencia entre la capacidad de almacén y el desfase.

En esta sección se muestran los resultados del estudio de la dependencia de las capacidades de fabricación y almacén óptimas respecto del desfase de los retornos en un sistema como el del ejemplo de la sección 4.

En primer lugar se han calculado las capacidades de fabricación y almacén óptimas cuando el sistema no tiene retornos, obteniendo los valores siguientes: *P** = 119,2, *S(P*)* = 118,61 y $c_T(P^*)$ = 25951. A continuación se han calculado las capacidades óptimas y los costes asociados a las mismas cuando el desfase de los retornos se hace variar entre 0 y 52 semanas. Los resultados obtenidos se muestran en las figuras 4, 5 y 6.

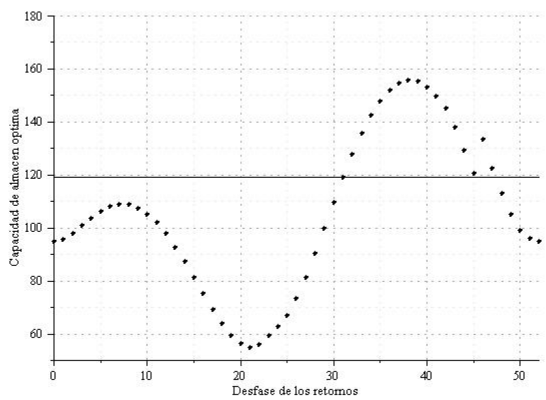

Figura 4: Dependencia de la capacidad de almacén óptima *S* respecto del desfase. Los puntos corresponden al sistema con retornos y la línea contínua al sistema sin retornos.

En la figura 4 se muestra que la capacidad de almacén óptima tiene fluctuaciones muy importantes. También se observa que la capacidad de almacén óptima cuando el sistema tiene retornos puede ser superior a la del sistema sin retornos.

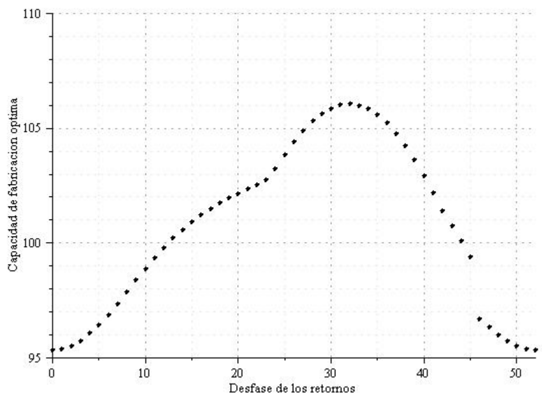

Figura 5: Dependencia de la capacidad de fabricación óptima respecto del desfase

En cuanto a la capacidad de fabricación, las variaciones calculadas son apenas del 10%, tal como se puede ver en la figura 5. Se puede observar en la figura 6 que el coste óptimo varía de forma significativa al variar el desfase. Teniendo en cuenta el coste calculado para el sistema sin retornos (25951), se podría dar el caso que fuera inferior al del sistema con retornos ya que en el cálculo de estos últimos faltaría añadir los costes de capacidad de refabricación.

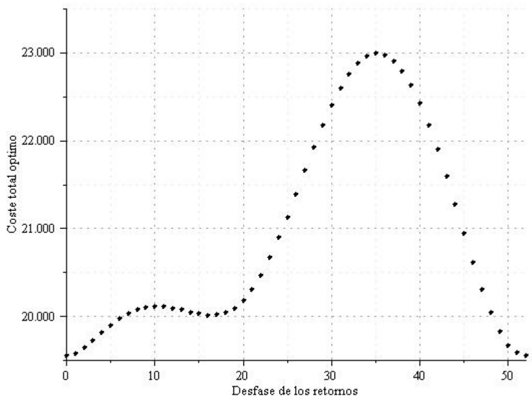

Figura 6: Dependencia del coste óptimo respecto del desfase

6. Conclusiones

En este trabajo se presenta un método para determinar las capacidades de fabricación y almacenaje óptimas en un sistema con logística inversa en el que se refabrica todo el producto retornado y con demanda periódica. Los aspectos más relevantes del método son:

- Fijando las capacidades de fabricación y almacenaje, el método permite calcular la política de fabricación óptima del sistema.

- Permite calcular la capacidad de fabricación y almacenaje óptimas.

- Se trata de un método de fácil implementación y que se utiliza en la sección cinco para estudiar las capaciadades óptimas en función del desfase de los retornos.

Otras conclusiones importantes del trabajo son las que se extraen del estudio realizado en la sección 5, de las cuales la más relevante es que la función de los retornos influye de forma muy significativa en las necesidades de almacén y en la rentabilidad total del sistema.

El método descrito se puede utilizar también como base para diferentes tipos de análisis como por ejemplo:

- Estudio de rentabilidad de implementación de un sistema con logística inversa.
- Viabilidad de inversiones en políticas que modifiquen el valor del desfase de los retornos.
- Influencia de la tasa de retorno ρ en las capacidades de fabricación y almacenaje.

El sistema estudiado es una aproximación de un sistema real y por tanto, algunas de las conclusiones pueden extenderse a sistemas más generales. En este sentido el presente trabajo puede ampliarse en el futuro, analizando sistemas más generales como por ejemplo los que disponen de stocks de producto retornado y de capacidad de refabricación limitada.

Referencias

Benedito, E.; Corominas, A. (2007). Optimal Manufacturing and remanufacturing capacities of systems with reverse logistics and deterministic demand. Working Paper.

Benedito, E.; Corominas, A. (2008). Determinación de las capacidades de fabricación y almacenaje en un sistema con logística inversa y demanda periódica. Working Paper. IOC-DT-P-2008-08.

Choi, D.-W.; Hwan, H.; Koh, S.-G. (2007). A generalized ordering and recovery policy for reusable items. European Journal of Operational Research, Vol 182, pp. 764-774.

Kiesmüller, G. P.; Minner, S.; Kleber, R. (2004). Managing Dynamic Product Recovery: An Optimal Control Perspective. In R. Dekker and M. Fleischmann and K. Inderfurth and L. N. Van Wassenhove, editors, *Reverse Logistics. Quantitative Models for Closed-Loop Supply Chais*, pp. 221-247. Springer-Verlag, Germany, 2004.

Rubio, S. (2003). El sistema de logística inversa en la empresa: análisis y aplicaciones. PhD thesis, Universidad de Extremadura.

Rubio, S.; Chamorro, A.; Miranda, F. J. (2008). Characteristics of research on reverse logistics (1995-2005). International Journal of Production Research, Vol 4, Num 15, pp. 1099-1120.

Rubio, S.; Corominas, A. (2008). Optimal manufacturing-remanufacturing policies in a lean production environment. Computers & Industrial Engineering, doi 10.1016/j.cie.2007.12.009.

Sethi, P; Thompson, G. L. (2003). Optimal Control Theory: Applications to Management Science and Economics. Kluwer Academic Publishers, Second edition, 2003.

Thierry, M. C.; Salomon, M.; van Nunen, J.; Van Wassenhove, L. N. (1995). Strategic issues in product recovery management. California Management Review, Vol 37, pp. 114-135.