3rd International Conference on Industrial Engineering and Industrial Management
XIII Congreso de Ingeniería de Organización
Barcelona-Terrassa, September 2nd-4th 2009

Modelo de planificación agregada integrando las funciones de marketing y producción*

Amaia Lusa García[1], Carme Martínez Costa[2], Marta Mas-Machuca[3]

[1] Instituto de Organización y Control de Sistemas Industriales y Dpto. de Organización de Empresas. Amaia.Lusa@upc.edu. Universitat Politècnica de Catalunya. Av. Diagonal, 647, p 11, 08028, Barcelona. [2] Dpto. de Organización de Empresas. Instituto de Organización y Control. ETSEIB. Universitat Politècnica de Catalunya. Avda. Diagonal 647, p7, 08028 Barcelona. mcarme.martinez@upc.edu [3]Dpto. de Organización de Empresas. ETSEIB. Universitat Politècnica de Catalunya. Avda. Diagonal 647, p7, 08028 Barcelona. marta.mas-machuca@upc.edu

Palabras clave: planificación agregada, integración producción y marketing, programación matemática.

1. Introducción

Este trabajo forma parte de un proyecto de investigación que tiene por objetivo el desarrollo de modelos y procedimientos de resolución para problemas de planificación agregada integrando diversas áreas funcionales de la empresa. Boiteux et al. (2008) presentan un modelo de programación lineal mixta con decisiones relativas a producción, tamaño de la plantilla, organización del tiempo de trabajo (con cuentas de horas) y tesorería (incluyendo, además de la gestión de cobros y pagos, diversas posibilidades para la gestión de las necesidades de financiación y la colocación de excedentes). En el presente trabajo se propone un modelo integrado de planificación agregada (PA), teniendo en cuenta principalmente las decisiones de producción y marketing. Se pretende con ello realizar una contribución para que la PA se convierta en una herramienta adecuada para prever, a medio plazo, las actividades de las principales áreas de la empresa y para garantizar la coordinación de las mismas.

La necesidad de coordinar las áreas funcionales de marketing y producción empezó a recibir una atención especial por parte de empresas y la comunidad científica en los años 70 (Saphiro, 1977; Wellam, 1977; Freeland, 1980), a raíz del trabajo de Damon y Schramm (1972) en el que se propone un modelo de optimización de la producción, el marketing y las finanzas. Resulta evidente que la incorporación de la estrategia de marketing en la planificación de la producción puede reducir los costes y aumentar los beneficios y, por ello, aunque los trabajos empíricos que cuantifiquen dicha mejora son aún escasos (O'Leary-Kelly et al., 2002), la conveniencia de esta integración es una idea que comparten varios autores (Leitch, 1974, Sadjani, 2005, Upasani, 2008).

2. Características del problema

Puesto que el objetivo del trabajo es ilustrar, mediante un modelo de optimización, la planificación integrada de las funciones de producción y marketing, se considera un caso relativamente sencillo de un sistema productivo con plantilla fija y en el que la capacidad productiva depende de las horas de trabajo ordinarias, que son conocidas, y las horas extras, que deben ser determinadas por el modelo (un caso con plantilla variable y una organización

* Trabajo financiado por el proyecto DPI2007-61588 del MEyC y FEDER.

del tiempo de trabajo basada en un sistema flexible ya ha sido modelizado y se puede consultar en Boiteux et al., 2008).

En relación con la función de marketing, se supone que el precio de los productos y el gasto en publicidad deben ser determinados y pueden variar a lo largo del horizonte temporal. Se considera que la demanda de cada producto en un periodo dado (D_{qt}) es independiente de la de los demás productos y que depende del precio del producto en dicho periodo (p_{qt}) y del gasto en publicidad en los τ períodos anteriores (A_j, j=t-τ,…,t-1).

3. Función de demanda

Son varias las funciones de demanda que se han propuesto en la literatura (Freeland, 1980, Sadjadi, 2005; Ahn et al., 2007). A efectos de optimización, la propiedad más importante es la convexidad de las funciones no lineales del modelo (i.e., la parte no lineal de la función de demanda y de la función de ingresos). Si éstas son convexas, el modelo puede ser resuelto como un programa no lineal o, por aproximación, mediante programación lineal (linealizando dichas funciones). En el presente trabajo asumimos que las funciones no lineales son convexas, lo cual concuerda con las propuestas realizadas en la literatura y con la teoría económica. Se ha utilizado una función de demanda del tipo $D_{qt}(p_{qt}, A_{q,t-\tau}, ..., A_{q,t-1}) = \alpha_{qt} + \beta_{qt} \cdot p_{qt}^{-\gamma_{qt}} + \sum_{j=t-\tau}^{t-1} \delta_{qj} \cdot A_{qj}$, con $\alpha_{qt} > 0,\ \gamma_{qt} > 1,\ \delta_{qj} \geq 0$. Demostrar la convexidad de la función $pv_{qt}^{-\gamma_{qt}}$ (parte no lineal de la función de demanda) es una tarea simple. Sin la asunción de convexidad, el modelo debería ser resuelto mediante un algoritmo aproximativo.

4. Modelo no lineal

Para resolver el problema se propone un modelo de optimización no lineal. La no linealidad se deriva, por una parte, de la relación no lineal entre la demanda y el precio y, por otra, de la función de ingresos (que es el producto de las ventas por el precio). A continuación se detallan los datos, las variables y las ecuaciones del modelo.

Datos

T	Horizonte de planificación (por ejemplo, 52 semanas)
Q	Número de productos
ρ_{qt}	Unidades producidas de producto q en el periodo t por hora y persona (q=1,…,Q, t=1,…,T)
v_q	Volumen de una unidad de producto q (q=1,…,Q)
US_q	Cota superior (en unidades de producto) para el stock de producto q (q=1,…,Q)
US	Capacidad de almacenaje (en volumen)
h_t	Número de horas de trabajo ordinarias en el periodo t (t=1,…,T)
LP_{qt}, UP_{qt}	Cota inferior y cota superior, respectivamente, para el precio del producto q en el periodo t (q=1,…,Q; t=1,…,T)
UA	Gasto máximo en publicidad para el conjunto del horizonte
W	Número de trabajadores
E_t	Número máximo de horas extras en el período t (t=1,…,T)

E Número máximo de horas extras para el conjunto del horizonte

$\alpha_{qt}, \beta_{qt}, \gamma_{qt}, \delta_{qj}$ Parámetros de la función de demanda (q=1,…,Q; t=1,…,T)

cp_{qt} Coste unitario de producción del producto q en el periodo t (q=1,…,Q; t=1,…,T)

cs_q Coste de posesión de stock del producto q por periodo (q=1,…,Q)

ce Coste de una hora extra

cr Coste unitario de ruptura de stock para el producto q (q=1,…,Q)

Variables

x_{qt} Unidades producidas de producto q en el periodo t (q=1,…,Q; t=1,…,T)

s_{qt} Unidades en stock de producto q al final del periodo t (q=1,…,Q; t=1,…,T)

r_{qt} Unidades de demanda no servida de producto q en el periodo t (q=1,…,Q; t=1,…,T) (se considera que la demanda no servida a tiempo de pierde)

he_t Número de horas de trabajo extra en el periodo t (t=1,…,T)

p_{qt} Precio de venta del producto q en el periodo t (q=1,…,Q; t=1,…,T)

A_{qt} Gasto en publicidad del producto q en el periodo t (q=1,…,Q; t=1,…,T)

D_{qt} Demanda de producto q en el periodo t (q=1,…,Q; t=1,…,T)

I_{qt} Ingresos por las ventas de producto q en el periodo t (q=1,…,Q; t=1,…,T)

Modelo

$$[MAX]\, z = \sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{q=1}^{Q}\left(I_{qt} - cp_{qt}\cdot x_{qt} - cs_q\cdot s_{qt} - cr_q\cdot r_{qt} - A_{qt}\right) - ce\cdot he_t\right) \quad (1)$$

$$I_{qt} = \left(D_{qt} - r_{qt}\right)\cdot p_{qt} \qquad q = 1,...,Q;\ t = 1,...,T \quad (2)$$

$$D_{qt} = \alpha_{qt} + \beta_{qt}\cdot p_{qt}^{-\gamma_{qt}} + \sum_{j=t-\tau}^{t-1} \delta_{qj}\cdot A_{qj} \qquad q = 1,...,Q;\ t = 1,...,T \quad (3)$$

$$s_{q,t-1} + x_{qt} + r_{qt} = D_{qt} + s_{qt} \qquad q = 1,...,Q;\ t = 1,...,T \quad (4)$$

$$\sum_{q=1}^{Q} \frac{x_{qt}}{\rho_{qt}} \le W\cdot\left(h_t + he_t\right) \qquad t = 1,...,T \quad (5)$$

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{q=1}^{Q} A_{qt} \le UA \quad (6)$$

$$\sum_{t=1}^{T} he_t \le E \quad (7)$$

$$he_t \le E_t \qquad t = 1,...,T \quad (8)$$

$$LP_{qt} \le p_{qt} \le UP_{qt} \qquad q = 1,...,Q;\ t = 1,...,T \quad (9)$$

$$s_{qt} \leq US_q \qquad q=1,...,Q;\ t=1,...,T \qquad (10)$$

$$\sum_{q=1}^{Q} v_q \cdot s_{qt} \leq US \qquad t=1,...,T \qquad (11)$$

$$x_{qt}, s_{qt}, r_{qt}, he_t, p_{qt}, A_{qt}, D_{qt}, I_{qt} \geq 0 \qquad (12)$$

La ecuación (1) se corresponde con la función objetivo a maximizar, en este caso, la diferencia entre ingresos y costes; los ingresos (ecuación (2)) dependen de la función de demanda (las ventas se corresponden con la demanda menos las unidades no servidas) y del precio del producto, por lo que son una función no lineal. Entre los costes se incluye el coste de producción, el coste de mantenimiento del stock, el coste de ruptura, el gasto en publicidad y las horas extra. La ecuación (3) se corresponde con la función de demanda (no lineal). En la ecuación (4) se establece el balance entre las unidades disponibles (stock de producto al final del periodo anterior y producción), las unidades en ruptura, la demanda y el stock al final del periodo. La ecuación (5) impone la capacidad máxima de producción: el número de horas necesarias para llevar a cabo la producción no puede ser superior al número de horas disponibles, considerando el tamaño de la plantilla y las horas de trabajo (ordinarias y extra). La ecuación (6) impone la cota superior para el gasto total en publicidad. Las ecuaciones (7) y (8) imponen, respectivamente, la cota superior para el número total de horas extra y para el número de horas extra en un periodo. La ecuación (9) establece la cota inferior y superior para el precio de los productos. La ecuación (10) impone la cota superior para el stock de producto q. La ecuación (11) limita el volumen total de stock en almacén. Finalmente, la ecuación (12) establece el carácter no negativo de las variables.

5. Linealización del modelo no lineal

Aunque existe software de optimización no lineal disponible en el mercado, el software de optimización lineal (como CPLEX), además de tener un uso más extendido, resulta más potente y ha sido objeto de mayores avances en los últimos tiempos. Por ello, se ha linealizado el modelo anterior y se ha resuelto mediante un software comercial de optimización lineal (CPLEX 10.0). Las ecuaciones del modelo anterior que deben ser linealizadas son la (2) y la (3), tal como se detalla a continuación.

5.1. Linealización de la función de ingresos

La ecuación (2) es no lineal y, además, no separable, por lo que no puede ser linealizada a tramos. La forma en que se puede proceder consiste en considerar que la variable p_{qt} puede tomar valores de una lista (esto no impide que ésta pueda adoptar un gran abanico de valores) y linealizar el producto $(D_{qt}\text{-}r_{qt})\cdot p_{qt}$ tal como se detalla a continuación.

Datos adicionales

P_{qt} Lista de valores que puede tomar la variable p_{qt} (q=1,…,Q; t=1,…T)

Variables adicionales

$y_{nqt} \in \{0,1\}$ Variable auxiliar para la linealización que toma valor 1 cuando el p_{qt} es igual a n (q=1,…,Q; t=1,…T; $n \in P_{qt}$)

Para linealizar la ecuación (2) del modelo no lineal, se debe sustituir ésta por las ecuaciones que se incluyen a continuación ((13) a (16)):

$$p_{qt} = \sum_{n \in P_{qt}} n \cdot y_{nqt} \qquad q = 1,...,Q;\ t = 1,...,T$$

(13)

$$\sum_{n \in P_{qt}} y_{nqt} = 1 \qquad q = 1,...,Q;\ t = 1,...,T$$

(14)

$$I_{qt} - n \cdot \left(D_{qt} - r_{qt}\right) \le M_{qt} \cdot \left(1 - y_{nqt}\right) \qquad q = 1,...,Q;\ t = 1,...,T; n \in P_{qt} \qquad (15)$$

$$I_{qt} - n \cdot \left(D_{qt} - r_{qt}\right) \ge -M_{qt} \cdot \left(1 - y_{nqt}\right) \qquad q = 1,...,Q;\ t = 1,...,T; n \in P_{qt}$$

(16)

M_{qt} debe tomar un valor suficientemente grande; en este caso $M_{qt} \ge \left(UP_{qt} - LP_{qt}\right) \cdot UD_{qt}$ (q=1,…,Q; t=1,…,T), siendo UD_{qt} una cota superior de D_{qt} que, en este caso, puede obtenerse a partir de la expresión siguiente: $UD_{qt} = \alpha_{qt} + \beta_{qt} \cdot LP_{qt}^{-\gamma_{qt}} + \max(\delta_{qj}) \cdot UA$.

Las ecuaciones (13) y (14) hacen que la variable binaria y_{nqt} tome valor 1 cuando p_{qt} es igual a n. Las ecuaciones (15) y (16) hacen que los ingresos sean igual a las ventas (D_{qt}-r_{qt}) por el precio cuando la variable binaria correspondiente a dicho precio toma valor 1.

5.2. Linealización de la función de demanda

La parte no lineal de la función de demanda es $p_{qt}^{-\gamma_{qt}}$ (q=1,…,Q; t=1,…T). Estas funciones dependen únicamente de una variable (p_{qt}), por lo que pueden ser linealizadas fácilmente descomponiendo la función en tramos (por ejemplo mediante programación separable convexa). En este caso, aprovechando las variables y restricciones utilizadas en la linealización de la ecuación (2), la linealización de la ecuación (3) resulta trivial; basta con sustituirla por la ecuación (17) que se incluye a continuación:

$$D_{qt} = \alpha_{qt} + \beta_{qt} \cdot \sum_{n \in P_{qt}} y_{nqt} \cdot n^{-\gamma_{qt}} + \sum_{j=t-\tau}^{t-1} \delta_{qj} \cdot A_{qj} \qquad q = 1,...,Q;\ t = 1,...,T \qquad (17)$$

6. Ejemplo

Para ilustrar el funcionamiento del modelo lineal, éste ha sido resuelto con un juego de datos generado a tal efecto. Los principales datos y resultados se incluyen a continuación.

T	52 semanas
Q	1 producto
ρ_t	1 unidad/hora-persona
US	800 unidades
h_t	40 horas
P	{10, 11, 12, 13, 14, 15}
UA	10.000 um

E	80 horas
α_t	En cada período se ha generado de forma aleatoria entre 300 y 800 unidades de modo que siguiera una cierta estacionalidad, tal como se aprecia en la Figura 1.
β_t	50.000
γ_t	1,9
δ_j	$\delta_1 = 0,5; \delta_2 = 0,4; \delta_3 = 0,3; \delta_4 = 0,2$
cp_t	2 um/unidad
cs	0,2 um/unidad-semana

W	23 trabajadores		ce	35 um/hora
E_t	10 horas		cr	0 um/unidad

Tabla 1. Datos del ejemplo

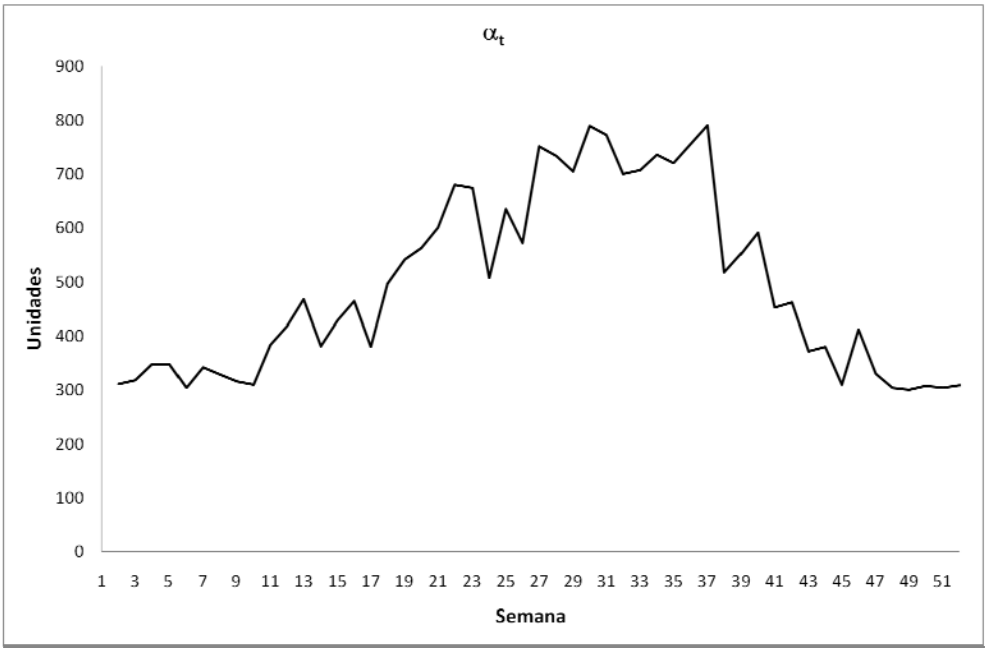

Figura 1. Valores de α_t

En las Figuras 2 y 3 se han representado, respectivamente, la demanda y los ingresos en función del precio de venta. En la Figura 2 se ha considerado un valor de α_t igual a 400 unidades y un gasto en publicidad igual a 0. En la Figura 3, en la que el ingreso se representa para diversos valores de α_t, se puede observar que el precio de venta para el que el ingreso es mínimo o máximo depende del valor de α_t. Por ello, y porque existen restricciones y otras variables que deben ser tenidas en cuenta (capacidad, gasto en publicidad, horas extras, etc.), la única forma de determinar el precio óptimo en cada período es mediante la resolución de un modelo matemático de optimización, tal como se propone en el presente trabajo.

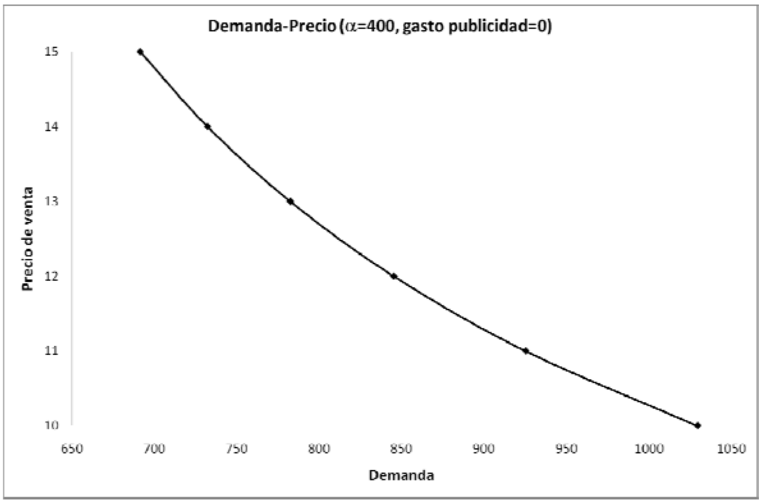

Figura 2. Relación entre la demanda y el precio de venta (para α=400 y gasto en publicidad=0)

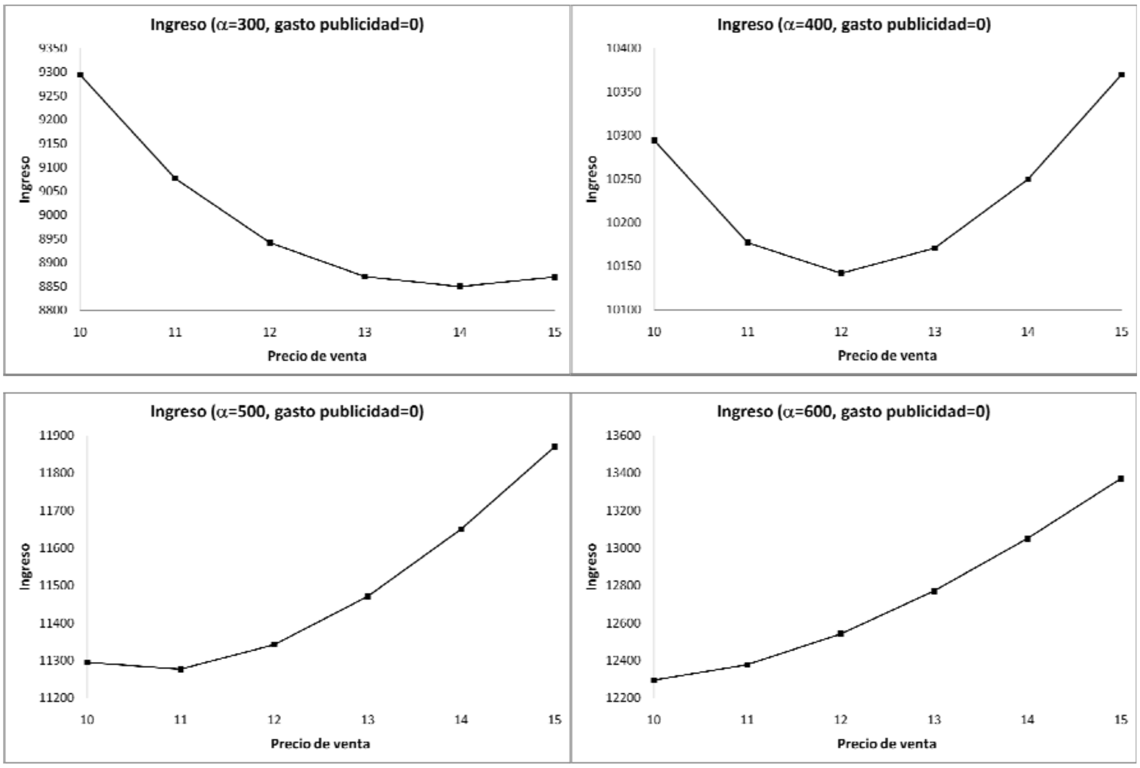

Figura 3. Evolución del ingreso en función del precio y de α (para α=300÷600 y gasto en publicidad=0)

En las Figuras 4, 5 y 6 se representa la solución óptima obtenida al resolver el modelo: el precio de venta, el gasto en publicidad y la relación entre la demanda, la producción y el stock. Como puede observarse en la Figura 4, los cambios que sufre el precio de venta son muy suaves. En caso de que los cambios fueran más bruscos, se podría generar en el mercado una respuesta imprevista por lo que convendría analizar la posibilidad de limitar los cambios en el precio de venta, por ejemplo, añadiendo una restricción que impida que el cambio de un periodo a otro sea superior a un cierto número de unidades monetarias.

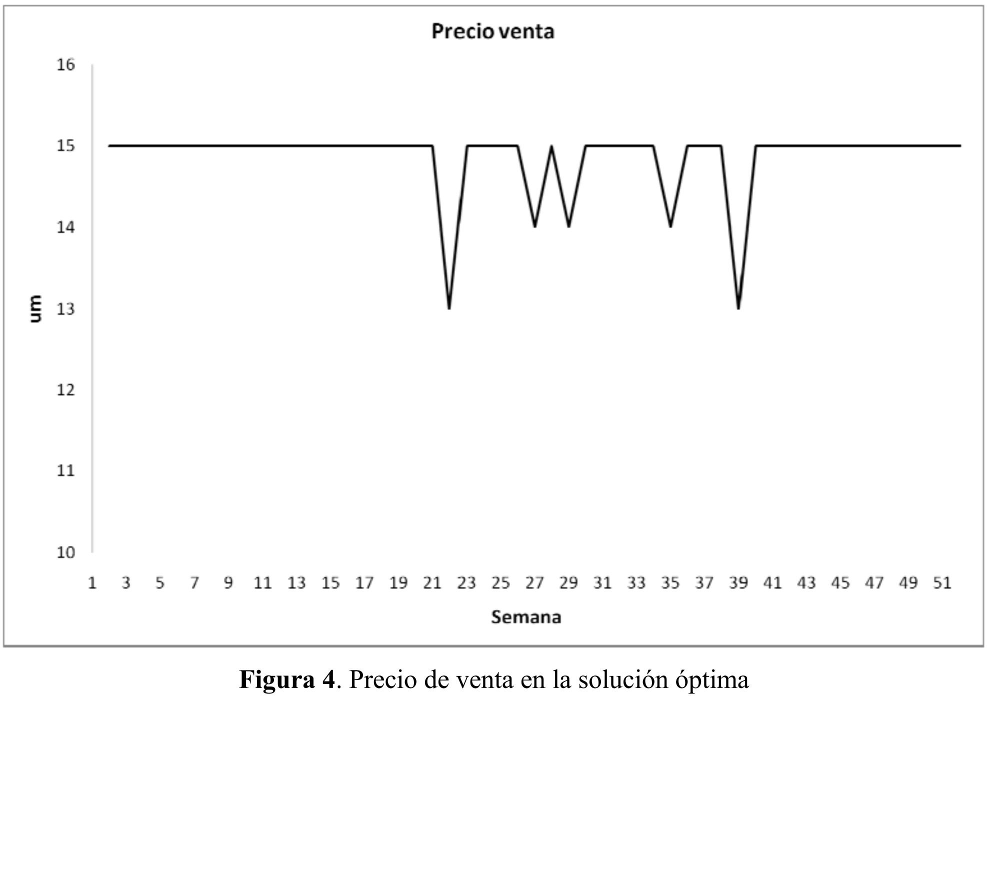

Figura 4. Precio de venta en la solución óptima

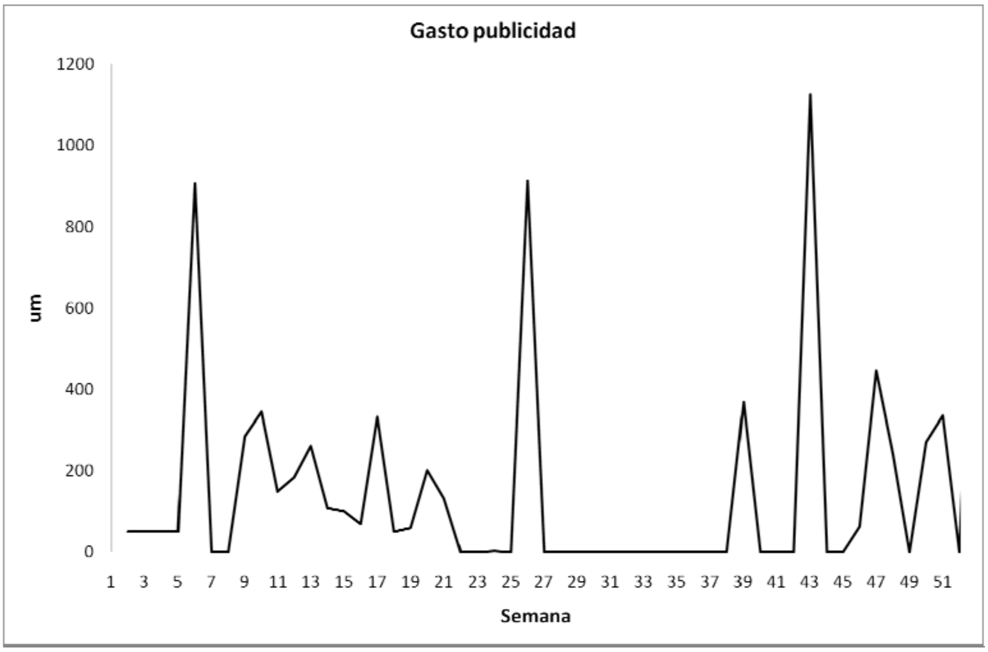

Figura 5. Gasto en publicidad en la solución óptima

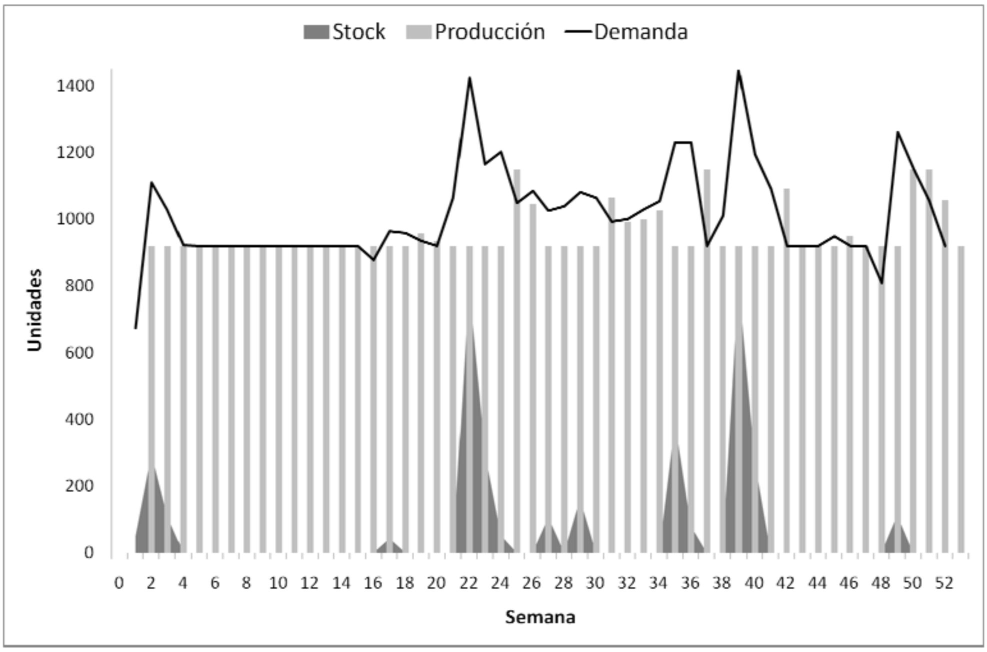

Figura 6. Demanda, producción y stock en la solución óptima

7. Conclusiones y líneas futuras

En este trabajo se presenta un modelo de optimización para la planificación conjunta de la producción y las principales decisiones de marketing (precio de venta y gasto en publicidad). Las funciones no lineales (relación entre precio y demanda y función de ingresos) han sido linealizadas mediante técnicas de programación lineal y programación lineal mixta, lo que permite resolver el modelo mediante software comercial de optimización lineal (como, por ejemplo, CPLEX).

Como líneas futuras, se propone añadir al modelo decisiones relativas a la gestión de la tesorería, puesto que la conveniencia de aumentar o disminuir el precio o de invertir en publicidad no depende únicamente de las decisiones de producción, sino también de otros factores como, por ejemplo, la disponibilidad de liquidez.

Referencias

Ahn, H.S., Gümüs, M., Kaminsky, P. (2007). Pricing and Manufacturing Decisions when Demand is a Function of Prices in Multiples Periods, Operations Research, vol. 55, nº 6, pp. 10369-1057.

Boiteux, O., Corominas, A., Lusa, A., Martínez, C. (2008). Modelo de planificación agregada de la producción, la plantilla, el tiempo de trabajo y la tesorería. II International Conference on Industrial Engineering and Industrial Management-XII. Congreso de Ingeniería de Organización, Burgos.

Damon, W., Schramm, R. (1972), A simultaneous decision model for production, marketing and finance, Management Science, vol. 19, no. 2, pp. 161-172.

Freeland, J. R. (1980). Coordination strategies for production and Marketing in a functionally decentralized firm, AIIE Transactions, vol. 12, no. 2, pp. 126-132.

Leitch, R. A. (1974). Marketing strategy and the optimal production schedule, Management Science, vol. 21, no. 3, pp. 302-312.

O'Leary-Kelly, S. W.; Flores, B. E. (2002). The integration of manufacturing and marketing/sales decisions: impact on organizational performance, Journal of Operations Systems, vol. 2, no. 3, pp. 221-240.

Sadjadi, S.J., Oroujrr, M., Aryanezhad, M.B. (2005). Optimal Production and Marketing Planning, Computational Optimization and Applications, nº 20, pp. 195-203.

Saphiro, B. P. (1977). Can marketing and manufacturing coexist? Harvard Business Review, vol. 55, pp. 104-114.

Upasani, A., Uzsoy, R. (2008). Incorporating manufacturing lead times in join production-marketing models: A review and some future directions, Annals of Operations Research, nº 161, pp. 171-188.

Wellam, U. P. (1977). On a simultaneous decision model for marketing, production and finance, Management Science, vol. 23, no. 9, pp. 1005-1009.